মাধ্যমিক জ্যামিতি

নবম-দশম শ্রেণী

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
ঢাকা

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড কর্তৃক ১৯৯৬ শিক্ষাবর্ষ
থেকে নবম–দশম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকরূপে নির্ধারিত

মাধ্যমিক জ্যামিতি

নবম–দশম শ্রেণী

রচনা
মোহাম্মদ নূরন্নবী খোন্দকার
দেওয়ান মোঃ আব্দুল কুদ্দুস

সম্পাদনা
আ.ফ.ম. খোদাদাদ খান

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

ইনার- মাধ্যমিক জ্যামিতি, ৯ম

জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড
৬৯-৭০, মতিঝিল বাণিজ্যিক এলাকা, ঢাকা
কর্তৃক প্রকাশিত

প্রথম মুদ্রণ : ফেব্রুয়ারি, ১৯৯৬
সংশোধিত ও পরিমার্জিত সংস্করণ : নভেম্বর, ২০০০
পরিমার্জিত সংস্করণ : ডিসেম্বর, ২০০৮

কম্পিউটার কম্পোজ
লেজার স্ক্যান লিমিটেড
৯৫৬২৮৬৫, ৯৫৬৭৬০৮

প্রচ্ছদ
সেলিম আহ্‌মেদ

চিত্রাঙ্কন
কাজী সাইফুদ্দীন আব্বাস
নাসির বিশ্বাস

ডিজাইন
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা

সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য।

মুদ্রণে :

প্রসঙ্গ কথা

শিক্ষার উন্নয়ন ব্যতীত জাতীয় উন্নয়ন সম্ভব নয়। স্বাধীনতা উত্তর বাংলাদেশের উন্নয়নের ধারায় জনগণের আশা-আকাঙ্ক্ষা, আর্থ-সামাজিক ও সাংস্কৃতিক জীবনপ্রবাহ যাতে পাঠ্যপুস্তকে প্রতিফলিত হয়, সেই লক্ষ্যে জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যসূচি প্রণয়ন কমিটির সুপারিশক্রমে আশির দশকের প্রারম্ভে প্রবর্তিত হয় নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের নতুন পাঠ্যপুস্তক। দীর্ঘ এক যুগেরও বেশি সময় ধরে এই পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রচলিত ছিল।

উন্নয়নের ধারায় ১৯৯৪ সালে নিম্ন মাধ্যমিক, মাধ্যমিক ও উচ্চ মাধ্যমিক স্তরের শিক্ষাক্রম সংস্কার, পরিমার্জন ও বাস্তবায়নের জন্য "শিক্ষাক্রম প্রণয়ন ও বাস্তবায়ন সম্পর্কিত টাস্কফোর্স" গঠিত হয়। ১৯৯৫ সালে নতুন শিক্ষাক্রম অনুযায়ী পর্যায়ক্রমে ৬ষ্ঠ থেকে ৯ম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। সময়ের সাথে সাথে দেশ ও সমাজের চাহিদা পরিবর্তনের প্রেক্ষাপটে ২০০০ সালে নিম্ন মাধ্যমিক ও মাধ্যমিক স্তরের প্রায় সকল পাঠ্যপুস্তক উচ্চ পর্যায়ের বিশেষজ্ঞদের দ্বারা যৌক্তিক মূল্যায়নের মাধ্যমে পুনরায় সংশোধন ও পরিমার্জন করা হয়। ২০০৮ সালে শিক্ষা মন্ত্রণালয় কর্তৃক গঠিত শিক্ষাবিষয়ক টাস্কফোর্সের সুপারিশে প্রচ্ছদ প্রণয়ন, বানান ও তথ্যগত বিষয় সংশোধনসহ পাঠ্যপুস্তক আকর্ষণীয় করা হয়েছে। আশা করা যায় এতে করে পাঠ্যপুস্তকটি শিক্ষক-শিক্ষার্থীর নিকট আরও গ্রহণযোগ্য ও সময়োপযোগী বলে বিবেচিত হবে।

শিক্ষাক্রমের আলোকে মূল্যায়নকে আরও ফলপ্রসূ করার জন্য দেশের বিভিন্ন সুধীজন ও শিক্ষাবিদগণের পরামর্শের প্রেক্ষিতে সরকারি সিদ্ধান্ত অনুযায়ী প্রতিটি অধ্যায়-শেষে বহুনির্বাচনি ও সৃজনশীল প্রশ্ন সংযোজন করা হয়েছে। প্রত্যাশা করা যায়, এতে শিক্ষার্থীর মুখস্থনির্ভরতা বহুলাংশে হ্রাস পাবে এবং শিক্ষার্থী তার অর্জিত জ্ঞান ও অনুধাবন বাস্তব জীবনে প্রয়োগ করতে বা যেকোনো বিষয়কে বিচার–বিশ্লেষণ অথবা মূল্যায়ন করতে পারবে।

জ্যামিতি গাণিতিক যুক্তি এবং প্রয়োগের দক্ষতা অর্জনে গুরুত্বপূর্ণ ভূমিকা রাখে। তাই জ্যামিতিচর্চার ঐতিহাসিক পটভূমির উল্লেখসহ ইউক্লিড বর্ণিত প্রাথমিক 'সংজ্ঞা', 'স্বীকার্য' ও 'স্বতঃসিদ্ধির' বর্ণনা আধুনিক ধ্যানধারণার নিরিখে উপস্থাপন করা হয়েছে। অধিকন্তু প্রযোজ্য ও প্রায়োগিক ক্ষেত্রে গণিতের ব্যবহারের প্রসার ঘটানোর জন্য ত্রিকোণমিতি ও পরিমিতি জ্যামিতি পাঠ্যপুস্তকে অন্তর্ভুক্ত হয়েছে।

আমরা জানি, শিক্ষাক্রম উন্নয়ন একটি ধারাবাহিক প্রক্রিয়া এবং এর ভিত্তিতে পাঠ্যপুস্তক রচিত হয়। কাজেই পাঠ্যপুস্তকের আরো উন্নয়নের জন্য যেকোনো গঠনমূলক ও যুক্তিসংগত পরামর্শ গুরুত্বের সাথে বিবেচিত হবে। ২০২১ সালে সাধীনতার সুবর্ণ জয়ন্তীতে প্রত্যাশিত সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ার নিরন্তর প্রচেষ্টার অংশ হিসেবে শিক্ষার্থীদের বিজ্ঞানমনস্ক করে তোলার লক্ষ্যে বর্তমান সংস্করণে কিছু পরিমার্জন করা হয়েছে। অতি অল্প সময়ের মধ্যে পরিমার্জিত পাঠ্যপুস্তকগুলো প্রকাশ করতে গিয়ে কিছু ত্রুটি বিচ্যুতি থেকে যেতে পারে। পরবর্তী সংস্করণে পাঠ্যপুস্তকগুলো আরো সুন্দর, শোভন ও ত্রুটিমুক্ত করার চেষ্টা অব্যাহত থাকবে।

যাঁরা এই পাঠ্যপুস্তকটি রচনা, সম্পাদনা, যৌক্তিক মূল্যায়ন, সৃজনশীল প্রশ্ন প্রণয়ন ও প্রকাশনার কাজে আন্তরিকভাবে মেধা ও শ্রম দিয়েছেন, তাঁদের জানাই ধন্যবাদ। যাদের জন্য পাঠ্যপুস্তকটি প্রণীত হল, আশা করি তারা উপকৃত হবে।

প্রফেসর মোঃ মোস্তফা কামালউদ্দিন
চেয়ারম্যান
জাতীয় শিক্ষাক্রম ও পাঠ্যপুস্তক বোর্ড, ঢাকা।

সূচিপত্র

প্রথম অধ্যায়

প্রাথমিক ধারণা ও সংজ্ঞা

১.১। ঐতিহাসিক পটভূমি

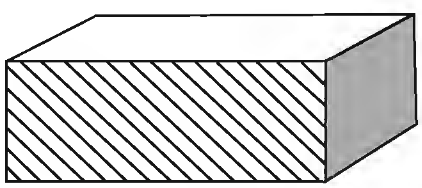
জ্যামিতি গণিত শাস্ত্রের একটি প্রাচীন শাখা। ব্যুৎপত্তিগতভাবে ‘জ্যামিতি’ বা ’Geometry’ শব্দের অর্থ ‘ভূমি পরিমাপ’। কৃষিভিত্তিক সভ্যতার যুগে ভূমি পরিমাপের সমস্যা সমাধানের প্রয়োজনেই জ্যামিতির সৃষ্টি হয়েছিল। তবে জ্যামিতি আজকাল কেবল ভূমি পরিমাপের জন্যই ব্যবহৃত হয় না, বরং বহু জটিল গাণিতিক সমস্যা সমাধানে ও ব্যাখ্যাদানে জ্যামিতিক জ্ঞান এখন অপরিহার্য।

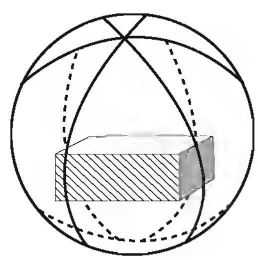
প্রাচীন সভ্যতার নিদর্শনগুলোতে জ্যামিতি চর্চার প্রমাণ পাওয়া যায়। ঐতিহাসিকদের মতে প্রাচীন মিশরে আনুমানিক চার হাজার বছর আগেই ভূমি জরিপের কাজে জ্যামিতিক ধ্যান–ধারণা ব্যবহার করা হয়। প্রাচীন ব্যাবিলন, ভারত ও চীনেও বিভিন্ন ব্যবহারিক কাজে জ্যামিতির প্রয়োগের নিদর্শন রয়েছে। তবে প্রাচীন গ্রীক সভ্যতার যুগেই জ্যামিতির প্রণালীবদ্ধ রূপটি সুস্পষ্টভাবে লক্ষ করা যায়। আনুমানিক খ্রিস্টপূর্ব ৩০০ অব্দে গ্রীক পণ্ডিত ইউক্লিড জ্যামিতির ইতস্তত বিক্ষিপ্ত সূত্রগুলোকে বিধিবদ্ধভাবে সুবিন্যস্ত করে তাঁর বিখ্যাত গ্রন্থ “Elements” রচনা করেন। তের খণ্ডে সম্পূর্ণ কালোত্তীর্ণ এই ‘ইলিমেন্টস’ গ্রন্থটিই আধুনিক জ্যামিতির ভিত্তিস্বরূপ।

১.২। স্থান, তল, রেখা ও বিন্দুর ধারণা

আমাদের চারপাশে বিস্তৃত স্থান (Space) সীমাহীন। এর বিভিন্ন অংশ জুড়ে রয়েছে ছোট বড় নানা রকম বস্তু। ছোট বড় বস্তু বলতে বালুকণা, আলপিন, পেন্সিল, কাগজ, বই, চেয়ার, টেবিল, ইট, বাক্স, বাড়িঘর, পাহাড়, পৃথিবী, গ্রহ–নক্ষত্র সবই বোঝান হয়। বিভিন্ন বস্তু স্থানের যে অংশ জুড়ে থাকে সে স্থানটুকুর আকার, আকৃতি, অবস্থান, বৈশিষ্ট্য প্রভৃতি থেকেই জ্যামিতিক ধ্যান–ধারণার উদ্ভব।

কোনো ঘনবস্তু (Solid) যে স্থান অধিকার করে থাকে, তা তিন দিকে বিস্তৃত। এ তিন দিকের বিস্তারই বস্তুটির তিনটি মাত্রা (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ) নির্দেশ করে। সেজন্য প্রত্যেক ঘনবস্তুই ত্রিমাত্রিক (Three-dimensional)। যেমন, একটি ইট বা বাক্সের তিনটি মাত্রা (দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ) আছে। একটি গোলকেরও তিনটি মাত্রা আছে। এর তিন মাত্রার অভিন্নতা স্পষ্ট বোঝা না গেলেও একে দৈর্ঘ্য–প্রস্থ–বেধ বিশিষ্ট খণ্ডে বিভক্ত করা যায়।

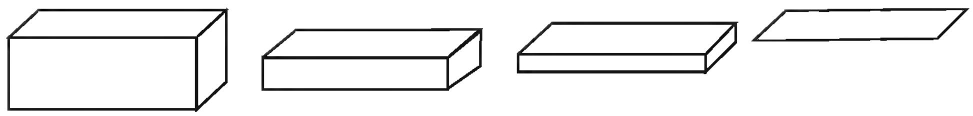




চিত্র – ১.১

ঘনবস্তুর উপরিভাগ তল (Surface) নির্দেশ করে অর্থাৎ, প্রত্যেক ঘনবস্তু এক বা একাধিক তল দ্বারা সীমাবদ্ধ থাকে। যেমন, একটি বাক্সের ছয়টি পৃষ্ঠ ছয়টি তলের অংশ। গোলকের উপরিভাগও একটি তল। তবে বাক্সের পৃষ্ঠতল ও গোলকের ওপর তল ভিন্ন প্রকারের। প্রথমটি **সমতল** (Plane Surface), দ্বিতীয়টি **বক্রতল** (Curved Surface)।

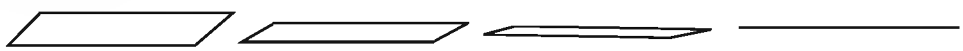
তল **দ্বিমাত্রিক** (two-dimensional); এর শুধু দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ আছে, কোনো বেধ নাই। একটি বাক্সের দুইটি মাত্রা ঠিক রেখে তৃতীয় মাত্রা ক্রমশ হ্রাস করে শূন্যে পরিণত করলে, বাক্সটির পৃষ্ঠবিশেষ মাত্র অবশিষ্ট থাকে। এভাবে ঘনবস্তু থেকে তলের ধারণায় আসা যায়।



চিত্র – ১.২

দুইটি তল পরস্পরকে ছেদ করলে ছেদস্থলে একটি **রেখা** (line) উৎপন্ন হয়। যেমন, বাক্সের দুইটি পৃষ্ঠতল বাক্সের একধারে একটি রেখায় মিলিত হয়। এই রেখা একটি **সরলরেখা** (straight line)। একটি লেবুকে একটি পাতলা ছুরি দিয়ে কাটলে, ছুরির সমতল যেখানে লেবুর বক্রতলকে ছেদ করে সেখানে একটি **বক্ররেখা** (curved line) উৎপন্ন হয়।

রেখা **একমাত্রিক** (one-dimensional); এর শুধু দৈর্ঘ্য আছে, প্রস্থ ও বেধ নাই। বাক্সের একটি পৃষ্ঠ–তলের প্রস্থ ক্রমশ হ্রাস পেয়ে সম্পূর্ণ শূন্য হলে, ঐ তলের একটি রেখা মাত্র অবশিষ্ট থাকে। এভাবে তলের ধারণা থেকে রেখার ধারণায় আসা যায়।



চিত্র – ১.৩

দুইটি রেখা পরস্পর ছেদ করলে বিন্দুর উৎপত্তি হয়, অর্থাৎ দুইটি রেখার ছেদস্থান বিন্দু (Point) দ্বারা নির্দিষ্ট হয়। বাক্সের দুইটি ধার–রেখা বাক্সের এক কোণায় একটি বিন্দুতে মিলিত হয়।

বিন্দুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ নাই, শুধু অবস্থান আছে। একটি রেখার দৈর্ঘ্য ক্রমশ হ্রাস পেয়ে অবশেষে শূন্য হলে, একটি বিন্দু মাত্র অবশিষ্ট থাকে। বিন্দুকে শূন্য মাত্রার সত্তা (entity) বলে গণ্য করা হয়।

চিত্র – ১.৪

ওপরে তল, রেখা ও বিন্দু সম্পর্কে যে ধারণা দেওয়া হল, তা তল, রেখা ও বিন্দুর সংজ্ঞা নয়– বর্ণনা মাত্র। এই বর্ণনায় দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, বেধ, মাত্রা ইত্যাদি ধারণা ব্যবহার করা হয়েছে, যেগুলো সংজ্ঞায়িত নয়। ইউক্লিড তাঁর 'ইলিমেন্টস' গ্রন্থের প্রথম খণ্ডের শুরুতেই বিন্দু, রেখা ও তলের যে 'সংজ্ঞা' উল্লেখ করেছেন তা–ও আধুনিক দৃষ্টিভঙ্গি অনুসারে অসম্পূর্ণ। ইউক্লিড প্রদত্ত বর্ণনা নিম্নরূপ :

(১) যার কোনো **অংশ** নাই, তাই বিন্দু।

(২) রেখার **প্রান্ত** বিন্দু।

(৩) যার কেবল **দৈর্ঘ্য** আছে, কিন্তু **প্রস্থ** নাই, তাই রেখা।

(৪) যে রেখার বিন্দুগুলো তার উপর **একই বরাবরে** থাকে, তাই সরলরেখা।

(৫) যার কেবল **দৈর্ঘ্য** ও **প্রস্থ** আছে, তাই তল।

(৬) তলের **প্রান্ত** রেখা।

(৭) যে তলের ওপরস্থ সরলরেখাগুলো তার ওপর **সমভাবে** থাকে, তাই সমতল।

এই বর্ণনায় নিচে দাগ দেওয়া শব্দগুলো লক্ষ করলে দেখা যায় যে, এগুলো অসংজ্ঞায়িতভাবেই গ্রহণ করা হয়েছে। বাস্তবিক পক্ষে, যেকোনো গাণিতিক আলোচনায় এক বা একাধিক প্রাথমিক ধারণা স্বীকার করে নিতে হয়। আধুনিক জ্যামিতিতে বিন্দু, সরলরেখা ও সমতলকে প্রাথমিক ধারণা হিসেবে গ্রহণ করে তাদের কিছু বৈশিষ্ট্যকে স্বীকার করে নেওয়া হয়। এই স্বীকৃত বৈশিষ্ট্যসমূহকে জ্যামিতিক স্বীকার্য (Postulate) বলা হয়। বাস্তব ধারণার সঙ্গে সঙ্গতি রেখেই এই স্বীকার্যসমূহ নির্ধারণ করা হয়।

১.৩। বিন্দু, সরলরেখা ও সমতল সংক্রান্ত কতিপয় মৌলিক স্বীকার্য

পূর্বেই উল্লেখ করা হয়েছে– বিন্দু, সরলরেখা ও সমতল জ্যামিতির তিনটি প্রাথমিক ধারণা। এদের যথাযথ সংজ্ঞা

দেওয়া সম্ভব না হলেও এদের সম্পর্কে আমাদের বাস্তব অভিজ্ঞতাপ্রসূত ধারণা রয়েছে।
বিমূর্ত জ্যামিতিক ধারণা হিসেবে স্থানকে বিন্দুসমূহের সেট ধরা হয় এবং সরলরেখা ও সমতলকে এই সার্বিক সেটের উপসেট বিবেচনা করা হয়। অর্থাৎ,
স্বীকার্য–১। স্থান (Space) সকল বিন্দুর সেট এবং সমতল ও সরলরেখা এই সেটের উপসেট।
এই স্বীকার্য থেকে আমরা লক্ষ করি যে, প্রত্যেক সমতল ও প্রত্যেক সরলরেখা এক একটি সেট, যার উপাদান হচ্ছে বিন্দু। জ্যামিতিক বর্ণনায় সাধারণত সেট প্রতীকের ব্যবহার পরিহার করা হয়। যেমন, কোনো বিন্দু একটি সরলরেখার (বা সমতলের) অন্তর্ভুক্ত হলে 'বিন্দুটি ঐ সরলরেখায় (বা সমতলে) অবস্থিত' অথবা, 'সরলরেখাটি (বা সমতলটি) ঐ বিন্দু দিয়ে যায়' অথবা অনুরূপ অর্থবহ বাক্য দ্বারা তা প্রকাশ করা হয়। একইভাবে, একটি সরলরেখা একটি সমতলের উপসেট হলে 'সরলরেখাটি ঐ সমতলে অবস্থিত' অথবা, 'সমতলটি ঐ সরলরেখা দিয়ে যায়' এ রকম বাক্য দ্বারা তা বর্ণনা করা হয়।
সরলরেখা ও সমতলের বৈশিষ্ট্য হিসেবে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,
স্বীকার্য – ২। দুইটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সরলরেখা আছে, যাতে উভয় বিন্দু অবস্থিত।
স্বীকার্য – ৩। একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন তিনটি ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সমতল আছে, যাতে বিন্দু তিনটি অবস্থিত।
স্বীকার্য – ৪। কোনো সমতলের দুইটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যায় এমন সরলরেখা ঐ সমতলে অবস্থিত।
স্বীকার্য – ৫।(ক) স্থানে একাধিক সমতল বিদ্যমান।
(খ) প্রত্যেক সমতলে একাধিক সরলরেখা অবস্থিত।
(গ) প্রত্যেক সরলরেখার বিন্দুসমূহ এবং বাস্তব সংখ্যাসমূহকে এমনভাবে সম্পর্কিত করা যায় যেন, রেখাটির প্রত্যেক বিন্দুর সঙ্গে একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয় এবং প্রত্যেক বাস্তব সংখ্যার সঙ্গে রেখাটির একটি অনন্য বিন্দু সংশ্লিষ্ট হয়।
মন্তব্য। স্বীকার্য–১ থেকে স্বীকার্য–৫ কে আপতন স্বীকার্য বলা হয়।
জ্যামিতিক বর্ণনাকে স্পষ্ট করার জন্য চিত্র ব্যবহার করা হয়। কাগজের ওপর পেন্সিল বা কলমের সূক্ষ্ম ফোঁটা দিয়ে বিন্দুর প্রতিরূপ (model) আঁকা হয়। সোজা রুলার বরাবর দাগ টেনে সরলরেখার প্রতিরূপ আঁকা হয়। যেমন,

কয়েকটি বিন্দু

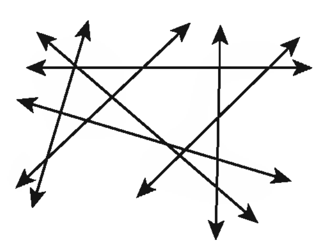
সরলরেখা

সরলরেখার চিত্রে দুই দিকে তীরচিহ্ন দিয়ে বোঝানো হয়েছে যে, রেখাটি উভয়দিকে অনির্দিষ্টভাবে বিস্তৃত।
স্বীকার্য–২ অনুযায়ী দুইটি ভিন্ন বিন্দু A ও B একটি অনন্য সরলরেখা নির্দিষ্ট করে যাতে বিন্দু দুইটি অবস্থিত হয়। এই রেখাকে AB রেখা বা BA রেখা বলা হয় এবং $\overleftrightarrow{AB}$ বা $\overleftrightarrow{BA}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয়।
স্বীকার্য–৫ (গ) অনুযায়ী এরূপ প্রত্যেক সরলরেখা অসংখ্য বিন্দু ধারণ করে।

১.৪। সমতল জ্যামিতি

স্বীকার্য–৫ (ক) অনুযায়ী একাধিক সমতল বিদ্যমান। এরূপ প্রত্যেক সমতলে অসংখ্য সরলরেখা রয়েছে।

জ্যামিতির যে শাখায় একই সমতলে অবস্থিত বিন্দু, রেখা এবং তাদের সঙ্গে সম্পর্কিত বিভিন্ন জ্যামিতিক সত্তা সম্পর্কে আলোচনা করা হয়, তাকে **সমতল জ্যামিতি** (Plane Geometry) বলা হয়। এ পুস্তকে সমতল জ্যামিতিই আমাদের বিবেচ্য বিষয়। সুতরাং, বিশেষ কোনো উল্লেখ না থাকলে বুঝতে হবে যে, আলোচ্য সকল বিন্দু, রেখা ইত্যাদি একই সমতলে অবস্থিত। এরূপ একটি নির্দিষ্ট সমতলই আমাদের আলোচনায় সার্বিক সেট।



১.৫। দূরত্ব ও সংখ্যারেখা

জ্যামিতিতে দূরত্বের ধারণাও একটি প্রাথমিক ধারণা। এ জন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য–৬। (ক) বিন্দুযুগল (P, Q) একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা নির্দিষ্ট করে থাকে। P বিন্দু থেকে Q বিন্দুর দূরত্ব বলা হয় এবং PQ দ্বারা সূচিত করা হয়।
(খ) P ও Q ভিন্ন বিন্দু হলে PQ সংখ্যাটি ধনাত্মক। অন্যথায়, $PQ = 0$।
(গ) P থেকে Q এর দূরত্ব এবং Q থেকে P এর দূরত্ব একই। অর্থাৎ $PQ = QP$।

মন্তব্য। $PQ = QP$ হওয়াতে এই দূরত্বকে সাধারণত P বিন্দু ও Q বিন্দুর মধ্যবর্তী দূরত্ব বলা হয়। ব্যবহারিকভাবে, এই দূরত্ব পূর্ব নির্ধারিত এককের সাহায্যে পরিমাপ করা হয়।

মন্তব্য। স্বীকার্য–৬ কে দূরত্ব স্বীকার্য বলা হয়।

স্বীকার্য–৫ (গ) অনুযায়ী প্রত্যেক সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট ও বাস্তব সংখ্যা সেটের মধ্যে এক–এক মিল স্থাপন করা যায়। এ প্রসঙ্গে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য–৭। কোনো সরলরেখায় অবস্থিত বিন্দুসমূহের সেট এবং বাস্তব সংখ্যা সেটের মধ্যে এমনভাবে এক–এক মিল স্থাপন করা যায়, যেন রেখাটির যেকোনো বিন্দু P, Q এর জন্য $PQ = |a-b|$ হয়, যেখানে মিলকরণের ফলে P ও Q এর সঙ্গে যথাক্রমে a ও b বাস্তব সংখ্যা সংশ্লিষ্ট হয়।

এই স্বীকার্যে বর্ণিত মিলকরণ করা হলে, রেখাটি একটি সংখ্যারেখায় পরিণত হয়েছে বলা হয়। সংখ্যারেখায় P বিন্দুর সঙ্গে a সংখ্যাটি সংশ্লিষ্ট হলে P কে a এর লেখবিন্দু এবং a কে P এর স্থানাঙ্ক বলা হয়।

কোনো সরলরেখাকে সংখ্যারেখায় পরিণত করার জন্য প্রথমে রেখাটির একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 0 এবং অপর একটি বিন্দুর স্থানাঙ্ক 1 ধরে নেওয়া হয়। এতে রেখাটিতে একটি একক দূরত্ব এবং একটি ধনাত্মক দিক নির্দিষ্ট হয়। এ জন্য স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য–৮। যেকোনো সরলরেখা AB কে এমনভাবে সংখ্যারেখায় পরিণত করা যায় যে, A এর স্থানাঙ্ক 0 এবং B এর স্থানাঙ্ক ধনাত্মক হয়।

মন্তব্য। স্বীকার্য–৭ কে রুলার স্বীকার্য এবং স্বীকার্য–৮ কে রুলার স্থাপন স্বীকার্য বলা হয়।

১.৬। জ্যামিতিক প্রমাণ

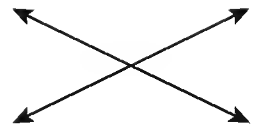
যেকোনো গাণিতিকি তত্ত্বে কতিপয় প্রাথমিক ধারণা, সংজ্ঞা এবং স্বীকার্যের ওপর ভিত্তি করে ধাপে ধাপে ঐ তত্ত্ব সম্পর্কিত বিভিন্ন উক্তি যৌক্তিকভাবে প্রমাণ করা হয়। এরূপ উক্তিকে সাধারণত প্রতিজ্ঞা বলা হয়। জ্যামিতিতে কতকগুলো প্রতিজ্ঞাকে বিশেষ গুরুত্ব দিয়ে উপপাদ্য হিসেবে গ্রহণ করা হয় এবং অন্যান্য প্রতিজ্ঞা প্রমাণে ক্রম অনুযায়ী এদের ব্যবহার করা হয়। জ্যামিতিক প্রমাণে বিভিন্ন তথ্য চিত্রের সাহায্যে বর্ণনা করা হয়। তবে প্রমাণ অবশ্যই যুক্তিনির্ভর হতে হবে।

জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞার বর্ণনায় সাধারণ নির্বচন (general enunciation) অথবা বিশেষ নির্বচন (particular enunciation) ব্যবহার করা হয়। সাধারণ নির্বচন হচ্ছে চিত্রনিরপেক্ষ বর্ণনা আর বিশেষ নির্বচন হচ্ছে চিত্রনির্ভর বর্ণনা। কোনো প্রতিজ্ঞার সাধারণ নির্বচন দেওয়া থাকলে প্রতিজ্ঞার বিষয়বস্তু বিশেষ নির্বচনের মাধ্যমে নির্দিষ্ট করা হয়। এ জন্য প্রয়োজনীয় চিত্র অঙ্কন করতে হয়। জ্যামিতিক উপপাদ্যের প্রমাণে সাধারণত নিম্নোক্ত অংশগুলো থাকে :

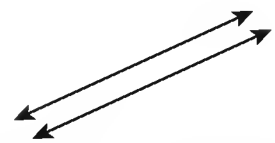
(১) সাধারণ নির্বচন
(২) চিত্র ও বিশেষ নির্বচন
(৩) প্রয়োজনীয় অঙ্কনের বর্ণনা এবং
(৪) প্রমাণের যৌক্তিক ধাপগুলোর বর্ণনা।

যদি কোনো প্রতিজ্ঞা সরাসরিভাবে একটি উপপাদ্যের সিদ্ধান্ত থেকে প্রমাণিত হয়, তবে তাকে অনেক সময় ঐ উপপাদ্যের অনুসিদ্ধান্ত (Corollary) হিসেবে উল্লেখ করা হয়। বিভিন্ন প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করা ছাড়াও জ্যামিতিতে বিভিন্ন চিত্র অঙ্কন করার প্রস্তাবনা বিবেচনা করা হয়। এগুলোকে সম্পাদ্য বলা হয়। সম্পাদ্যবিষয়ক চিত্র অঙ্কন করে চিত্রাঙ্কনের বর্ণনা ও যৌক্তিকতা উল্লেখ করতে হয়।

১.৭। পরস্পরচ্ছেদী ও সমান্তরাল রেখা



সংজ্ঞা। দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে পরস্পরচ্ছেদী বলা হয়, যদি উভয়রেখায় অবস্থিত একটি সাধারণ বিন্দু থাকে।



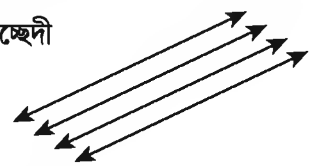
সংজ্ঞা। একই সমতলস্থ দুইটি ভিন্ন সরলরেখাকে সমান্তরাল বলা হয়, যদি তাদের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে।

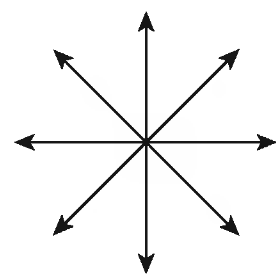
লক্ষণীয় যে,

(১) দুইটি ভিন্ন সরলরেখার সর্বাধিক একটি সাধারণ বিন্দু থাকতে পারে। কারণ, স্বীকার্য–২ অনুযায়ী দুইটি ভিন্ন বিন্দু কেবল একটি সরলরেখাতেই অবস্থিত থাকতে পারে।

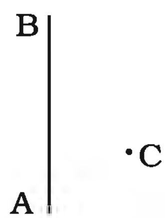
(২) এই সমতলস্থ দুইটি ভিন্ন সরলরেখা হয় সমান্তরাল, না হয় তারা কেবল এক বিন্দুতে ছেদ করে।

তিন বা ততোধিক সরলরেখার কোনো দুইটিই যদি পরস্পরচ্ছেদী না হয়, তবে তাদের পরস্পর সমান্তরাল বলা হয়।





তিন বা ততোধিক সরলরেখার যদি একটি সাধারণ বিন্দু থাকে, তবে তারা ঐ বিন্দুতে সমবিন্দু (Concurrent) হয়েছে বলা হয় এবং ঐ বিন্দুকে **সম্পাত বিন্দু** (Point of Concurrence) বলা হয়।

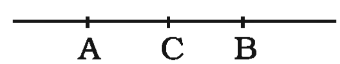


একই সমতলে AB কোনো সরলরেখা এবং C ঐ রেখায় অবস্থিত নয় এমন কোনো বিন্দু হলে, C বিন্দু দিয়ে AB এর সমান্তরাল একটি সরলরেখা অঙ্কন করা যায়।

স্বীকার্য–৯। একটি সরলরেখায় অবস্থিত নয় এরূপ কোনো বিন্দু দিয়ে একই সমতলে সরলরেখাটির সমান্তরাল একটি ও কেবল একটি সরলরেখা আছে।

এই স্বীকার্যকেই সমান্তরাল রেখা স্বীকার্য বলা হয়। এটি প্লেফেয়ারের স্বীকার্য নামেও পরিচিত (John Playfair : 1748-1819)।

১.৮। অন্তর্বর্তীতা



পাশের চিত্রে, C বিন্দু A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী ধরা হয়।

সংজ্ঞা। C বিন্দু A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী বলা হয় যদি A, C ও B একই সরলরেখার ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু হয় এবং $AC + CB = AB$ হয়।

C বিন্দু A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী হলে, অনেক সময় $A - C - B$ লিখে তা প্রকাশ করা হয়।

সংজ্ঞা। কতকগুলো বিন্দু যদি এমন হয় যে তারা সকলেই একটি সরলরেখায় অবস্থিত তবে তাদের সমরেখ বিন্দু (Collinear) বলা হয়।

অন্তর্বর্তীতার কয়েকটি প্রয়োজনীয় বৈশিষ্ট্য নিম্নে উল্লেখ করা হল :

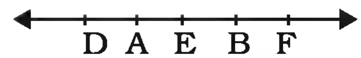
(১) A-C-B (C বিন্দু A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী) হলে,

(ক) A, C ও B সমরেখ ভিন্ন বিন্দু;

(খ) B-C-A (C বিন্দু B ও A বিন্দুর অন্তর্বর্তী)।

(২) কোনো সংখ্যারেখার, A, C ও B বিন্দুর স্থানাঙ্ক যথাক্রমে a, c ও b হলে A-C-B হবে যদি ও কেবল যদি $a < c < b$ অথবা $a > c > b$ হয়।

(৩) A ও B ভিন্ন বিন্দু হলে, এমন বিন্দু D, E, F রয়েছে যেন D-A-B, A-E-B এবং A-B-F।



(৪) A, B ও C তিনটি সমরেখ ভিন্ন বিন্দু হলে, তাদের একটি এবং কেবল একটি অপর দুইটির অন্তর্বর্তী।

১.৯। রেখাংশ

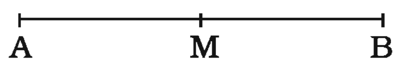
সংজ্ঞা। A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু হলে, A, B এবং তাদের অন্তর্বর্তী সকল বিন্দুর সেটকে A ও B বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বা সংক্ষেপে AB রেখাংশ বলা হয়।

AB রেখাংশকে অনেক সময় $\overline{AB}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। A ও B কে $\overline{AB}$ রেখাংশের প্রান্তবিন্দু এবং $\overleftrightarrow{AB}$ রেখাকে $\overline{AB}$ রেখাংশের ধারকরেখা বলা হয়। A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী প্রত্যেক বিন্দুকে $\overline{AB}$ রেখাংশের অন্তঃস্থ বিন্দু বলা হয়।

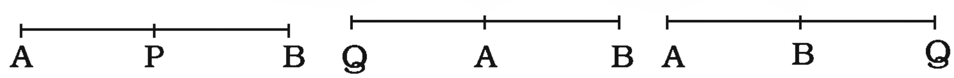
লক্ষণীয় যে, $\overline{AB}$ রেখাংশ $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার একটি উপসেট যা A ও B এবং A ও B এর অন্তর্বর্তী সকল বিন্দুকে ধারণ করে। অর্থাৎ,
$\overline{AB}$ = { P : P হচ্ছে A অথবা B অথবা A ও B এর অন্তর্বর্তী কোনো বিন্দু }।

সংজ্ঞা। A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু হলে, A ও B এর দূরত্বকেই $\overline{AB}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্য বলা হয়।
অর্থাৎ, $\overline{AB}$ রেখাংশের দৈর্ঘ্য = AB।

সংজ্ঞা। M বিন্দুকে $\overline{AB}$ রেখাংশের মধ্যবিন্দু বলা হয় যদি A-M-B অর্থাৎ, M বিন্দু A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী হয় এবং AM = MB হয়।



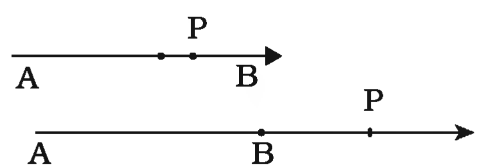
উল্লেখ্য যে, প্রত্যেক রেখাংশের একটি অনন্য মধ্যবিন্দু আছে। মধ্যবিন্দুতে রেখাংশটি সমদ্বিখণ্ডিত হয়েছে বলা হয়।
সাধারণভাবে, A ও B ভিন্ন বিন্দু হলে এবং m ও n যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা হলে,



(১) এমন অনন্য বিন্দু P আছে যে, A-P-B এবং AP ঃ PB = m ঃ n এবং
(২) এমন অনন্য বিন্দু Q আছে যে, Q-A-B অথবা A-B-Q এবং AQ ঃ QB = m ঃ n।
প্রথম ক্ষেত্রে P বিন্দু AB রেখাংশকে m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে Q বিন্দু AB রেখাংশকে m ঃ n অনুপাতে বহির্বিভক্ত করে বলা হয়।

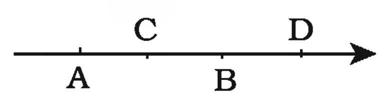
১.১০। রশ্মি

সংজ্ঞা। A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু হলে, A থেকে B এর দিকে রশ্মি বা AB রশ্মি হচ্ছে A, B এবং ঐ সকল P এর সেট যেখানে A-P-B অথবা A-B-P।

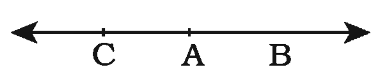


এরূপ রশ্মিকে $\overrightarrow{AB}$ দ্বারা সূচিত করা হয়। A বিন্দুকে $\overrightarrow{AB}$ এর প্রান্তবিন্দু এবং $\overleftrightarrow{AB}$ রেখাকে $\overrightarrow{AB}$ রশ্মির ধারক রেখা বলা হয়। A ব্যতীত $\overrightarrow{AB}$ ভুক্ত প্রত্যেক বিন্দুকে $\overrightarrow{AB}$ এর অন্তঃস্থ বিন্দু বলা হয়।
লক্ষণীয় যে, $\overrightarrow{AB}$ রশ্মি $\overleftrightarrow{AB}$ রেখার একটি উপসেট এবং $\overline{AB}$ রেখাংশ $\overrightarrow{AB}$ রশ্মির একটি উপসেট।

সংজ্ঞা। $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{CD}$ কে সমরেখ রশ্মি বলা হয় যদি তাদের ধারক রেখা একই হয় অর্থাৎ $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ একই রেখা হয়।

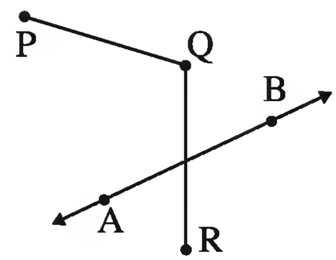


সংজ্ঞা। তিনটি বিন্দু A, B, C যদি এমন হয় যে C- A-B, তবে $\overrightarrow{AC}$ কে $\overrightarrow{AB}$ এর বিপরীত রশ্মি বলা হয়।



লক্ষণীয় যে, প্রত্যেক রশ্মি $\overrightarrow{AB}$ এর একটি ও কেবল একটি বিপরীত রশ্মি $\overrightarrow{AC}$ রয়েছে এবং $\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ রশ্মি ভিন্ন, কিন্তু সমরেখ।

১.১১। তল বিভাজন



চিত্রে, $\overleftrightarrow{AB}$ তে অবস্থিত নয় সমতলের তিনটি বিন্দু P, Q, R এমন যে P ও Q রেখাটির এক পার্শ্বে এবং R বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।
এ প্রসঙ্গে আমরা স্বীকার করে নিই যে,

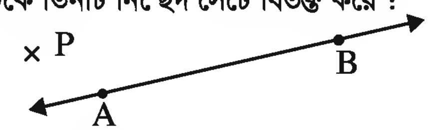
স্বীকার্য

(ক) সমতলস্থ প্রত্যেক সরলরেখার সমতলে দুইটি ও কেবল দুইটি পার্শ্ব রয়েছে। এরূপ প্রত্যেক পার্শ্ব সমতলের একটি অশূন্য উপসেট যাতে ঐ রেখার কোনো বিন্দু অন্তর্ভুক্ত নয়।

(খ) সমতলস্থ একটি সরলরেখায় অবস্থিত নয় এরূপ প্রত্যেক বিন্দু ঐ রেখার কোনো এক পার্শ্বে অবস্থিত। দুইটি ভিন্ন বিন্দু রেখাটির এক পার্শ্বে অবস্থিত হলে, এই বিন্দু দুইটির অন্তর্বর্তী সকল বিন্দু একই পার্শ্বে অবস্থিত হয়।

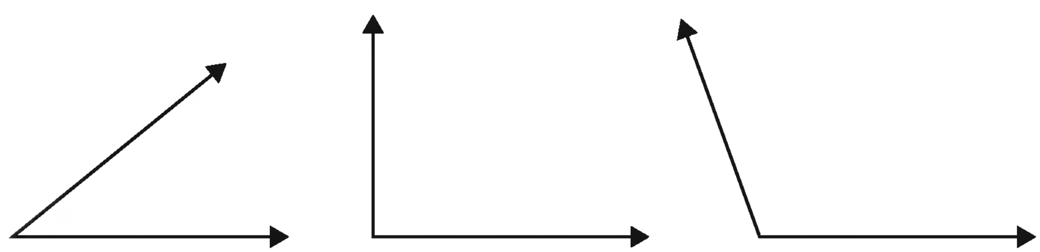
দুইটি ভিন্ন বিন্দু রেখাটির দুই পার্শ্বে অবস্থিত হলে, বিন্দু দুইটির অন্তর্বর্তী একটি বিন্দু রেখাটিতে অবস্থিত হয়।

মন্তব্য : সমতলস্থ প্রত্যেক সরলরেখা সমতলটিকে তিনটি নিচ্ছেদ সেটে বিভক্ত করে :
(এক) রেখাটি নিজে
(দুই) রেখাটির এক পার্শ্ব
(তিন) রেখাটির অপর পার্শ্ব।



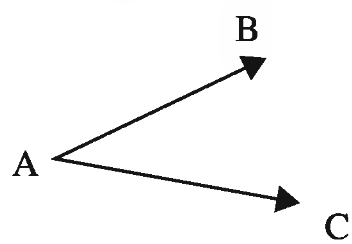
রেখাটির এক পার্শ্বে একটি বিন্দু P নির্দিষ্ট করে সেই পার্শ্বকে রেখাটির P পার্শ্ব এবং অপর পার্শ্বকে তার বিপরীত পার্শ্ব বলা হয়।

১.১২। কোণ



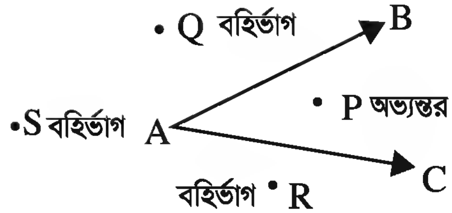
ওপরের চিত্রগুলো এক একটি কোণের প্রতিরূপ।

সংজ্ঞা। সমতলস্থ দুইটি রশ্মির যদি একই প্রান্তবিন্দু থাকে এবং যদি তাদের ধারক রেখা একই না হয় তবে সাধারণ প্রান্তবিন্দুতে তাদের সংযোগে একটি কোণ উৎপন্ন হয়েছে বলা হয়।



$\overrightarrow{AB}$ ও $\overrightarrow{AC}$ রশ্মির প্রান্তবিন্দু A তে উৎপন্ন কোণটিকে $\angle BAC$ বা $\angle CAB$ বা সংক্ষেপে $\angle A$ দ্বারা নির্দেশ করা হয়। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ এই কোণের বাহু এবং এদের সাধারণ প্রান্তবিন্দু A কে এই কোণের **শীর্ষবিন্দু** বলা হয়।

কোণের অভ্যন্তর এবং বহির্ভাগ

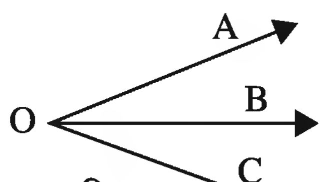


চিত্রে, P বিন্দু $\angle BAC$ এর অভ্যন্তরে এবং
Q, S ও R বিন্দুগুলো তার বহির্ভাগে অবস্থিত।

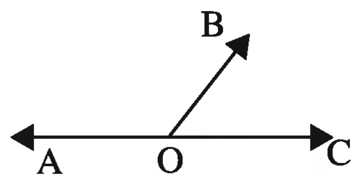
সংজ্ঞা : $\angle BAC$ এর অভ্যন্তর হল $\overrightarrow{AB}$ এর C পার্শ্বে এবং $\overrightarrow{AC}$ এর B পার্শ্বে অবস্থিত সমতলের সকল বিন্দুর সেট।

কোণটির অভ্যন্তরে অথবা কোনো বাহুতে অবস্থিত নয় সমতলস্থ এমন সকল বিন্দুর সেটকে তার বহির্ভাগ বলা হয়। কোণটির অভ্যন্তরে প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি অন্তঃস্থ বিন্দু এবং বহির্ভাগের প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি বহিঃস্থ বিন্দু বলা হয়।

সন্নিহিত কোণ



চিত্র – ১



চিত্র – ২

উভয় চিত্রে, $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ একে অপরের সন্নিহিত কোণ।

সংজ্ঞা : সমতলস্থ দুইটি কোণের যদি (১) একই শীর্ষবিন্দু থাকে, (২) একটি সাধারণ বাহু থাকে এবং (৩) তাদের অভ্যন্তরদ্বয়ের কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে, তবে কোণদ্বয়ের একটিকে অপরটির সন্নিহিত কোণ বলা হয় এবং সাধারণ বাহু ব্যতীত অপর দুই বাহুকে তাদের বহিঃস্থ বাহু বলা হয়।

চিত্রে, $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ সন্নিহিত কোণদ্বয়ের একই শীর্ষবিন্দু O, একটি সাধারণ বাহু $\overrightarrow{OB}$ এবং কোণদ্বয়ের অভ্যন্তরে কোনো সাধারণ বিন্দু নাই।

$\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ কোণ দুইটির বহিঃস্থ বাহু।

মন্তব্য : কোনো রশ্মি তার প্রান্তবিন্দুতে একটি সরলরেখার সাথে মিলিত হলে, যে দুইটি কোণ উৎপন্ন হয় তারাও সন্নিহিত কোণ (চিত্র–২ দ্রষ্টব্য)।

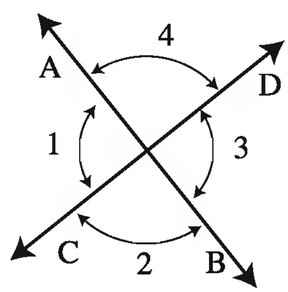
এক্ষেত্রে বহিঃস্থ বাহুদ্বয় $\overrightarrow{OA}$ এবং $\overrightarrow{OC}$ একই সরলরেখা $\overleftrightarrow{AC}$ এর অংশ।

রৈখিক যুগল কোণ

সংজ্ঞা : দুইটি সন্নিহিত কোণের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় যদি বিপরীত রশ্মি হয় অর্থাৎ একই সরলরেখার অংশ হয়, তবে কোণ দুইটিকে রৈখিক যুগল কোণ বলা হয়।

চিত্র–২ এর $\angle AOB$ ও $\angle COB$ রৈখিক যুগল কোণ।

বিপ্রতীপ কোণ



চিত্রে, $\angle 1$ এবং $\angle 3$ এক যুগল বিপ্রতীপ কোণ যা $\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ এর ছেদের ফলে উৎপন্ন হয়েছে।

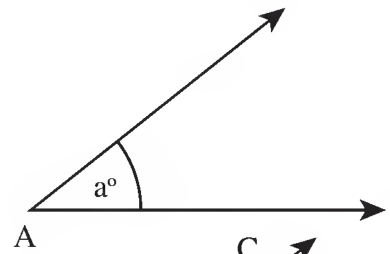
একইভাবে, চিত্রে $\angle 2$ এবং $\angle 4$ আরেক যুগল বিপ্রতীপ কোণ একই সরলরেখাদ্বয় দ্বারা উৎপন্ন।

সংজ্ঞা : দুইটি কোণের একটির বাহুদ্বয় অপরটির বাহুদ্বয়ের বিপরীত রশ্মি হলে, কোণ দুইটিকে বিপ্রতীপ কোণ বলা হয়।

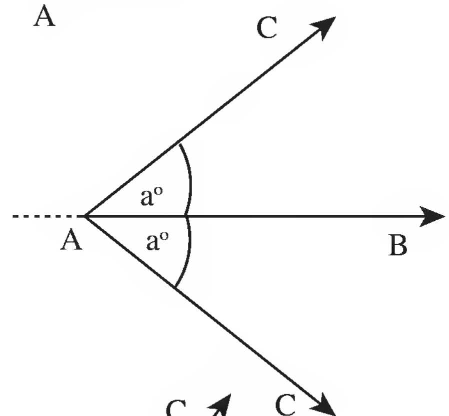
কোণ পরিমাপ : কোণ পরিমাপের জন্য ডিগ্রি (Degree) একক ব্যবহার করা হয়। এ প্রসঙ্গে স্বীকার করে নেওয়া হয় যে,

স্বীকার্য

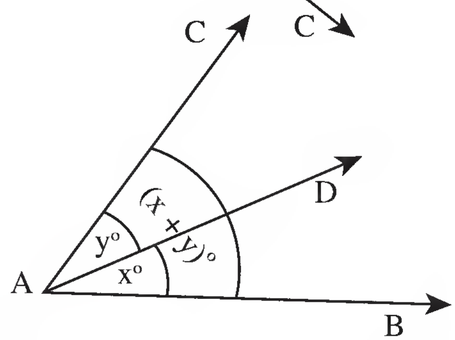
(ক) (কোণ পরিমাপ) সমতলস্থ প্রত্যেক কোণ $\angle A$ এর জন্য একটি অনন্য বাস্তব সংখ্যা a নির্দিষ্ট আছে, যেখানে $0 < a < 180$। এই a কে $\angle A$ এর ডিগ্রি পরিমাপ বলা হয় এবং $m\angle A = a$ বা $\angle A = a^o$ লিখে প্রকাশ করা হয়।



(খ) (কোণ অঙ্কন) যদি $0 < a < 180$ হয় এবং $\overrightarrow{AB}$ সমতলস্থ কোনো রশ্মি হয়, তবে $\overleftrightarrow{AB}$ এর যেকোনো পার্শ্বে একটি অনন্য রশ্মি $\overrightarrow{AC}$ আছে যেন $\angle BAC = a^o$ হয়।

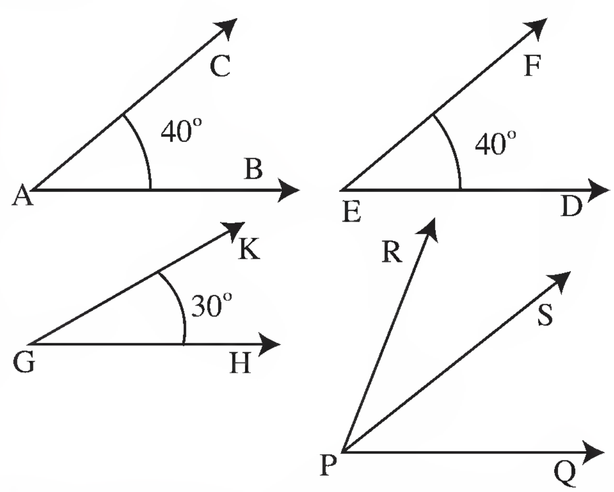


(গ) (কোণ যোজন) যদি সমতলস্থ $\angle BAC$ এর অভ্যন্তরে D কোনো বিন্দু হয় এবং $\angle BAD = x^o$ এবং $\angle DAC = y^o$ হয়, তবে $\angle BAC = (x+y)^o$



মন্তব্য। সাধারণত চাঁদার সাহায্যে কোণের পরিমাপ নির্ধারণ করা হয়।

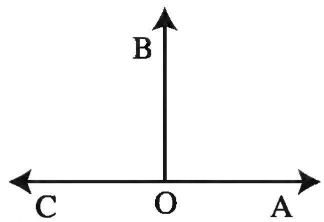
দ্রষ্টব্য। $\angle BAC$ ও $\angle DEF$ ভিন্ন কোণ হলেও যদি তাদের ডিগ্রি পরিমাপ একই হয়, তবে পরিমাপের সমতা বোঝাতে $\angle BAC = \angle DEF$ লেখা হয়। একইভাবে, $\angle BAC > \angle HGK$ দ্বারা $\angle BAC$ এর ডিগ্রি পরিমাপ যে $\angle HGK$ এর ডিগ্রি পরিমাপের চেয়ে বড় তাই বোঝায়। কোণ যোজন প্রক্রিয়ায় $\angle QPS$ ও $\angle SPR$ এর ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি $\angle QPR$ এর ডিগ্রি পরিমাপের সমান। এ অর্থে $\angle QPS + \angle SPR = \angle QPR$ লেখা হয়।



সমকোণ

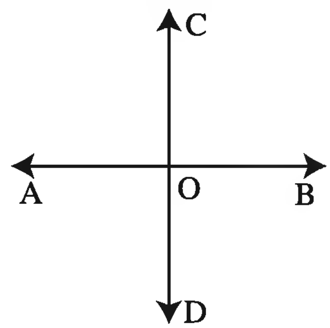
সংজ্ঞা। একটি কোণকে সমকোণ বলা হয় যদি কোণটির ডিগ্রি পরিমাপ এবং কোণটির এক বাহু ও অপর বাহুর বিপরীত রশ্মি দ্বারা উৎপন্ন কোণের ডিগ্রি পরিমাপ সমান হয়।

চিত্রে, $\overrightarrow{OA}$ ও $\overrightarrow{OC}$ বিপরীত রশ্মি এবং $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ এর ডিগ্রি পরিমাপ সমান। অর্থাৎ, $\angle AOB = \angle BOC$। $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ প্রত্যেকে সমকোণ।

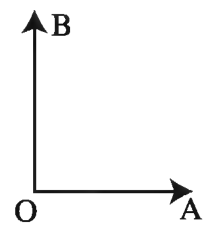


লক্ষণীয় যে, $\angle AOB$ ও $\angle BOC$ রৈখিক যুগল কোণ। এরূপ রৈখিক যুগল কোণের ডিগ্রি পরিমাপ সমান হলে, তাদের প্রত্যেকে সমকোণ।

দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখার ছেদবিন্দুতে যে চারটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাদের একটি সমকোণ হলে অপর তিনটিও প্রত্যেকে সমকোণ। আমরা স্বীকার করে নিই যে,



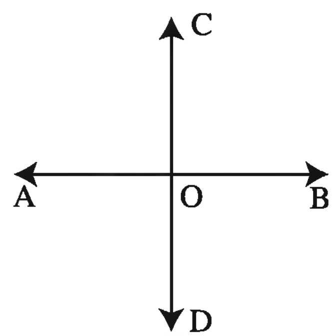
স্বীকার্য। সমকোণের ডিগ্রি পরিমাপ 90।
অর্থাৎ, $\angle AOB$ সমকোণ হলে $m\angle AOB = 90$
অর্থাৎ, $\angle AOB = 90^\circ$
এক্ষেত্রে $\angle AOB = 1$ সমকোণ লেখা হয়।
কোণ পরিমাপের একক হিসাবে
1 সমকোণ $= 90^\circ$
$1^\circ = 1$ সমকোণের $\frac{1}{90}$



লম্ব

সংজ্ঞা। দুইটি সরলরেখা পরস্পরচ্ছেদী হলে ছেদবিন্দুতে যে চারটি কোণ উৎপন্ন হয়, তাদের একটি সমকোণ হলে, রেখা দুইটি ছেদ বিন্দুতে পরস্পর লম্ব বলা হয়।

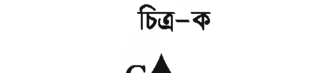
চিত্রে, AB রেখা ও CD রেখার ছেদ বিন্দু O এবং $\angle BOC$ $=1$ সমকোণ (অপর তিনটি কোণও প্রত্যেকে সমকোণ)।
ফলে, AB রেখা ও CD রেখা O বিন্দুতে পরস্পর লম্ব। এক্ষেত্রে $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ লেখা হয়।



$\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$ এবং A-O-B ও C-O-D হলে $\overrightarrow{OC}$ রশ্মি ও $\overleftrightarrow{AB}$ রেখা সাধারণ বিন্দু O তে পরস্পর লম্ব (প্রতীক : $\overrightarrow{OC} \perp \overleftrightarrow{AB}$). OC রশ্মি ও OB রশ্মি সাধারণ বিন্দু O তে পরস্পর লম্ব (প্রতীক : $\overrightarrow{OC} \perp \overrightarrow{OB}$), CO রেখাংশ O বিন্দুতে AB রেখার বা AB রেখাংশের ওপর লম্ব ইত্যাদি বলা হয়।

সরলকোণ

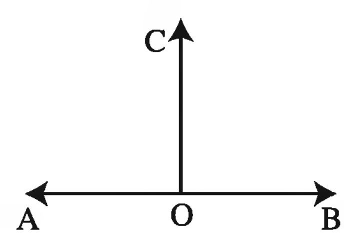
কোণের সংজ্ঞায় বাহু দুইটির ধারক রেখা ভিন্ন ধরা হয়েছে। ব্যবহারিক প্রয়োজনে অনেক সময় চিত্র–ক এর মত সরলকোণ AOB বিবেচনা করা হয় যার বাহু দুইটি বিপরীত রশ্মি।



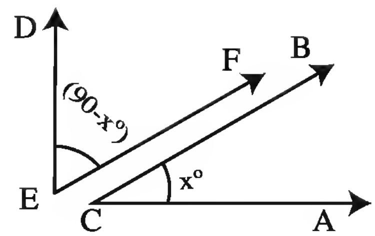
চিত্র–ক

AB রেখার O বিন্দুতে OC রশ্মি লম্ব হলে এবং A-O-B হলে
সরলকোণ AOB $= \angle AOC + \angle COB$
$= 1$ সমকোণ $+ 1$ সমকোণ
$= 2$ সমকোণ

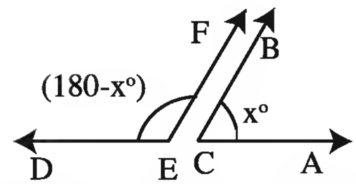
ধরা হয়। অর্থাৎ সরলকোণ AOB এর পরিমাণ 2 সমকোণ বা $2 \times 90^\circ = 180^\circ$.



পূরক কোণ ও সম্পূরক কোণ

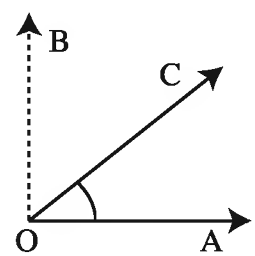


সংজ্ঞা : দুইটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি 90° হলে কোণ দুইটিকে পূরক কোণ (Complementary angles) বলা হয়।
চিত্রে, $\angle ACB$ ও $\angle DEF$ পূরক কোণ।
সংজ্ঞা : দুইটি কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি 180° হলে, কোণ দুইটিকে সম্পূরক কোণ (Supplementary angles) বলা হয়।
চিত্রে, $\angle ACB$ ও $\angle DEF$ সম্পূরক কোণ।

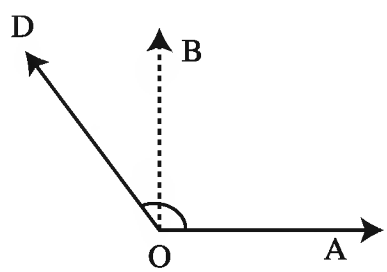


মন্তব্য। দুইটি সম্পূরক কোণ সন্নিহিত হলে তারা রৈখিক যুগল কোণ হয়। এরূপ সম্পূরক কোণ দুইটির একটিকে অপরটির রৈখিক সম্পূরক বলা হয়।

সূক্ষ্মকোণ ও স্থূলকোণ

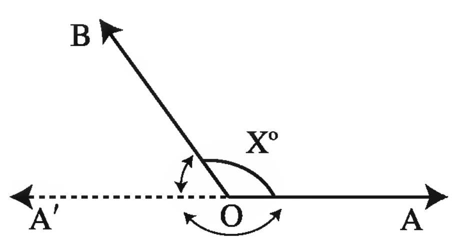


সংজ্ঞা। এক সমকোণ থেকে ছোট কোণকে সূক্ষ্মকোণ এবং এক সমকোণ থেকে বড় কিন্তু দুই সমকোণ থেকে ছোট কোণকে স্থূলকোণ বলা হয়।
পাশের চিত্রে, $\angle AOC$ সূক্ষ্মকোণ এবং $\angle AOD$ স্থূলকোণ। উল্লেখ্য যে, $\angle AOC < \angle AOB$ এবং $\angle AOD > \angle AOB$ দ্বারা কোণগুলোর ডিগ্রি পরিমাপের তুলনাই বোঝায়।



প্রবৃদ্ধকোণ

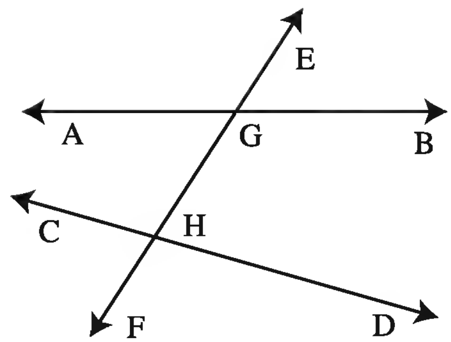
আমরা লক্ষ করি যে, ভিন্ন ধারক রেখায় অবস্থিত একই প্রান্তবিশিষ্ট দুইটি রশ্মি সাধারণ প্রান্তবিন্দুতে যে কোণ উৎপন্ন করে তার ডিগ্রি পরিমাপ 180° থেকে ছোট। নিম্নের চিত্রে, $\angle AOB$ এরূপ একটি কোণ যার পরিমাপ x° দেখানো হয়েছে। অনেক সময় বর্ণনার সুবিধার্থে এরূপ কোণের সঙ্গে একটি প্রবৃদ্ধকোণ সংশ্লিষ্ট রয়েছে কল্পনা করা হয় যার পরিমাপ কোণটির একটি রৈখিক সম্পূরক কোণের পরিমাপ ও একটি সরলকোণের পরিমাপের সমষ্টির সমান।



যেমন, পাশের চিত্রে, x° পরিমাপের $\angle AOB$ এর সংশ্লিষ্ট প্রবৃদ্ধকোণের পরিমাপ

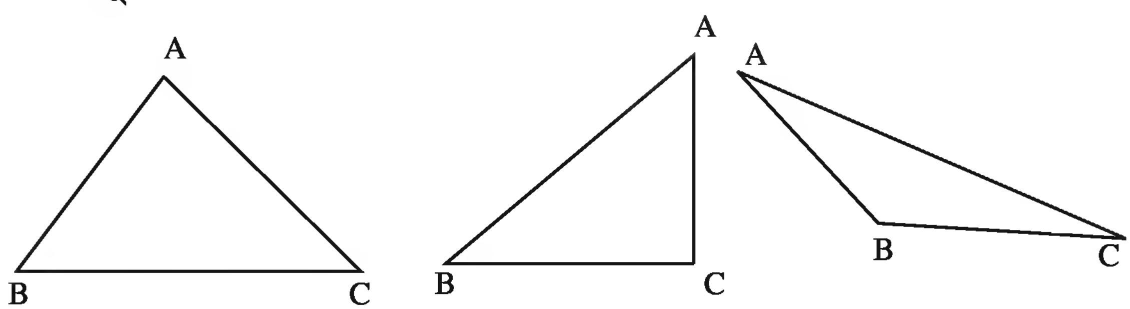
প্রবৃদ্ধকোণ $AOB = \angle BOA' +$ সরলকোণ $A'OA$
$= (180 - x)^\circ + 180^\circ$
$= (360 - x)^\circ$।

একান্তর ও অনুরূপ কোণ



চিত্রে, সমতলস্থ $\overleftrightarrow{AB}$ এবং $\overleftrightarrow{CD}$ কে $\overleftrightarrow{EF}$ যথাক্রমে G এবং H বিন্দুতে ছেদ করেছে। $\overleftrightarrow{EF}$ কে $\overleftrightarrow{AB}$ ও $\overleftrightarrow{CD}$ এর ছেদক বলা হয়। এরূপক্ষেত্রে $\angle AGH$ ও $\angle BGH$ কে যথাক্রমে $\angle GHD$ ও $\angle GHC$ এর **একান্তর কোণ** এবং $\angle AGE$, $\angle AGH$, $\angle BGE$ ও $\angle BGH$ কে যথাক্রমে $\angle GHC$, $\angle CHF$, $\angle GHD$ ও $\angle DHF$ এর **অনুরূপ কোণ** বলা হয়। এদের মধ্যে $\angle AGE$, $\angle BGE$, $\angle CHF$ ও $\angle DHF$ কে **বহিঃস্থ কোণ** এবং $\angle AGH$, $\angle BGH$, $\angle GHC$ ও $\angle GHD$ কে **অন্তঃস্থ কোণ** বলা হয়।

১.১৩। ত্রিভুজ



সংজ্ঞা : যদি সমতলস্থ তিনটি বিন্দু সমরেখ না হয় তবে তাদের দুইটি দুইটি করে সংযোজন করে প্রাপ্ত চিত্রকে একটি ত্রিভুজ বলা হয়।

যদি সমতলস্থ A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ না হয়, তবে A ও B, B ও C এবং C ও A এর সংযোজক রেখাংশ তিনটি দ্বারা গঠিত চিত্রকে ABC ত্রিভুজ বলা হয় এবং ΔABC লিখে নির্দেশ করা হয়। A, B, C বিন্দু তিনটিকে ΔABC এর শীর্ষবিন্দু এবং AB, BC, CA রেখাংশ তিনটিকে তার বাহু বলা হয়। $\angle ABC$, $\angle BCA$ এবং $\angle BAC$ কে ΔABC এর কোণ বলা হয় এবং এগুলোকে অনেক সময় সংক্ষেপে যথাক্রমে $\angle B$, $\angle C$ এবং $\angle A$ লেখা হয়। BC বাহুকে $\angle A$ এর বিপরীত বাহু এবং $\angle A$ কে BC বাহুর বিপরীত কোণ বলা হয়। AB ও AC বাহুকে $\angle A$ এর সন্নিহিত বাহু এবং $\angle A$ কে AB ও AC বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণ বলা হয়।

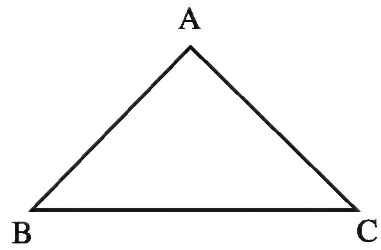
ত্রিভুজের অভ্যন্তর এবং বহির্ভাগ

সংজ্ঞা : কোনো ত্রিভুজের তিনটি কোণেরই অভ্যন্তরে অবস্থিত সমতলের সকল বিন্দুর সেটকে ত্রিভুজের অভ্যন্তর বলা হয়। সমতলস্থ যে সকল বিন্দু ত্রিভুজের অভ্যন্তরে অথবা ত্রিভুজের কোনো বাহুতে অবস্থিত নয় তাদের সেটকে ত্রিভুজের বহির্ভাগ বলা হয়।

ত্রিভুজের অভ্যন্তরের প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি অন্তঃস্থ বিন্দু এবং বহির্ভাগের প্রত্যেক বিন্দুকে তার একটি বহিঃস্থ বিন্দু বলা হয়।

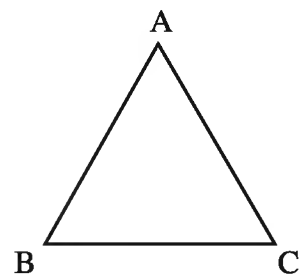
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ

সংজ্ঞা : কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহুর দৈর্ঘ্য সমান হলে, ত্রিভুজটিকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলা হয়। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান (দৈর্ঘ্য সমান অর্থে) বাহু দুইটির ছেদ বিন্দুর বিপরীত বাহুকে তার ভূমি এবং ঐ ছেদ বিন্দুতে ত্রিভুজের কোণকে তার শিরঃকোণ বলা হয়। পাশের চিত্রের, ΔABC এ AB এবং AC সমান বাহু, BC ভূমি এবং $\angle A$ শিরঃকোণ।

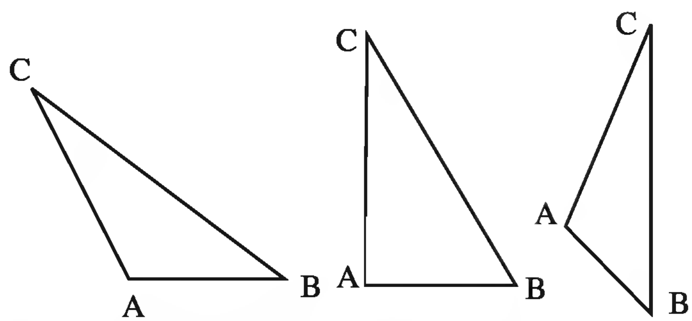


সমবাহু ত্রিভুজ

সংজ্ঞা : যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যই সমান, তাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলা হয়।



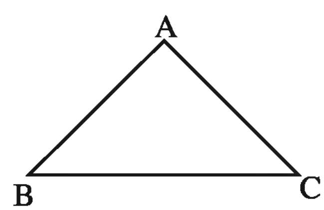
বিষমবাহু ত্রিভুজ



সংজ্ঞা : যে ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্যই ভিন্ন ভিন্ন, তাকে বিষমবাহু ত্রিভুজ বলা হয়।

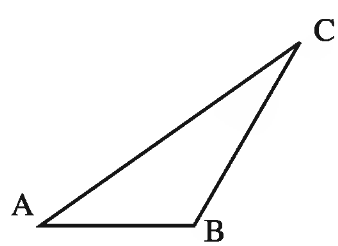
সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ

সংজ্ঞা : যে ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ সূক্ষ্মকোণ, তাকে সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ বলা হয়।

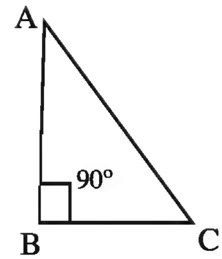


স্থূলকোণী ত্রিভুজ

সংজ্ঞা : যে ত্রিভুজের একটি কোণ স্থূলকোণ, তাকে স্থূলকোণী ত্রিভুজ বলা হয়।

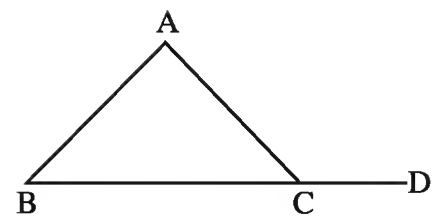


সমকোণী ত্রিভুজ



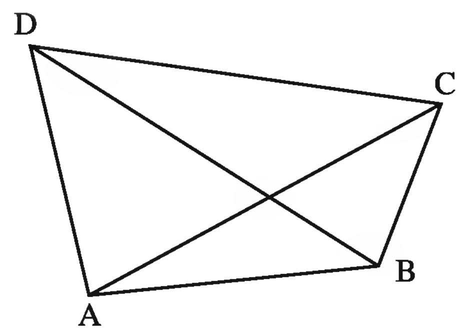
সংজ্ঞা : যে ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ, তাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলা হয়। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের বিপরীত বাহুকে অতিভুজ এবং সমকোণ সংলগ্ন বাহুদ্বয়ের একটিকে ভূমি ও অপরটিকে উন্নতি বলা হয়।

ত্রিভুজের অন্তঃস্থ ও বহিঃস্থ কোণ

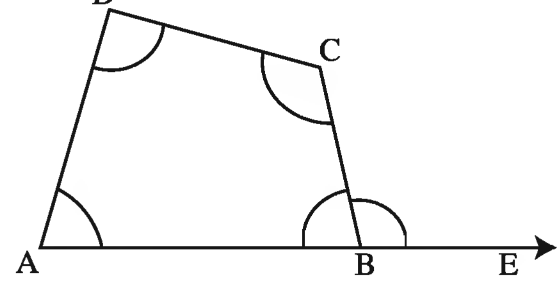


ΔABC এর বহিঃস্থ কোনো বিন্দু D যদি BC তে অবস্থিত হয়, তবে D বিন্দুকে BC বাহুর বর্ধিতাংশের একটি বিন্দু বলা হয়। যদি B-C-D (অর্থাৎ B ও D এর অন্তর্বর্তী C) হয়, তবে BD হচ্ছে BC বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করে প্রাপ্ত রেখাংশ। C শীর্ষবিন্দুতে CD ও CA দ্বারা উৎপন্ন $\angle ACD$ কে ΔABC এর একটি বহিঃস্থ কোণ বলা হয়। এ প্রসঙ্গে ত্রিভুজটির কোণগুলোকে তার অন্তঃস্থ কোণ বলা হয়। বহিঃস্থ $\angle ACD$ এর সন্নিহিত অন্তঃস্থ কোণ হচ্ছে $\angle ACB$ এবং বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ হচ্ছে $\angle CBA$ ও $\angle CAB$।

১.১৪। চতুর্ভুজ



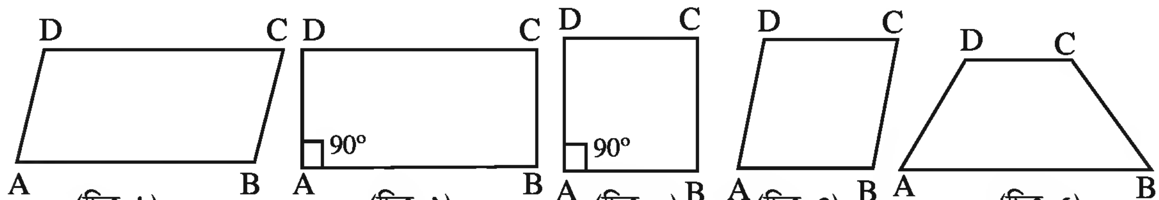
সংজ্ঞা : যদি সমতলস্থ A, B, C, D বিন্দু চারটি এমন হয় যে, (ক) তাদের যেকোনো তিনটি সমরেখ নয় (খ) AB, BC, CD, DA রেখাংশগুলোর কোনো দুইটির প্রান্ত বিন্দু ছাড়া সাধারণ বিন্দু নাই এবং (গ) AB রেখার একই পার্শ্বে C ও D এবং CD রেখার একই পার্শ্বে A ও B অবস্থিত হয়, তবে AB, BC, CD, DA রেখাংশ চারটির সংযোগে উৎপন্ন চিত্রকে ABCD চতুর্ভুজ বলা হয়। ABCD চতুর্ভুজকে অনেক সময় ABCD লিখে নির্দেশ করা হয়। A, B, C, D বিন্দু চারটিকে চতুর্ভুজটির শীর্ষ; A ও C এর একটিকে অপরটির এবং B ও D এর একটিকে অপরটির বিপরীত শীর্ষ; AB, BC, CD, DA রেখাংশ চারটিকে বাহু; AB ও CD এর একটিকে অপরটির এবং BC ও DA এর একটিকে অপরটির বিপরীত বাহু এবং AC ও BD রেখাংশদ্বয়কে কর্ণ বলা হয়। ABCD, ADCB, BCDA ইত্যাদি একই চতুর্ভুজ নির্দেশ করে। একে ADBC দ্বারা নির্দেশ করা যায় না, কারণ DB ও CA রেখাংশের সাধারণ বিন্দু রেখাংশ দুইটির অন্তঃস্থ বিন্দু।



$\angle DAB$, $\angle ABC$, $\angle BCD$ ও $\angle CDA$ চতুর্ভুজটির চারটি কোণ। এদেরকে অনেক সময় সংক্ষেপে যথাক্রমে $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ ও $\angle D$ লিখে প্রকাশ করা হয়। $\angle A$ ও $\angle B$ এর সাধারণ বাহু AB এবং পরস্পর সন্নিহিত কোণ। একইভাবে $\angle B$ ও $\angle C$, $\angle C$ ও $\angle D$, $\angle D$ ও $\angle A$ পরস্পর সন্নিহিত। $\angle A$ ও $\angle C$ এবং $\angle B$ ও $\angle D$ পরস্পর বিপরীত কোণ।

ABCD চতুর্ভুজের AB বাহুর বর্ধিতাংশে E বিন্দু যদি এমন হয় যে A-B-E তবে $\angle CBE$ চতুর্ভুজটির একটি বহিঃস্থ কোণ। $\angle CBA$ এই বহিঃস্থ কোণের সন্নিহিত অন্তঃস্থ কোণ এবং $\angle ADC$ বিপরীত অন্তঃস্থ কোণ।

বিভিন্ন শ্রেণীর চতুর্ভুজ



(চিত্র–১) (চিত্র–২) (চিত্র–৩) (চিত্র–৪) (চিত্র–৫)

চিত্র–১, ২, ৩, ৪ এবং ৫ যথাক্রমে সামান্তরিক, আয়ত, বর্গ, রম্বস এবং ট্রাপিজিয়ামের প্রতিরূপ।

সামান্তরিক : চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো সমান্তরাল হলে, তাকে সামান্তরিক বলা হয়।

আয়ত : সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হলে, তাকে আয়ত বলা হয়।
উল্লেখ্য যে, সামান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ হলে, সব কোণই সমকোণ হয়।

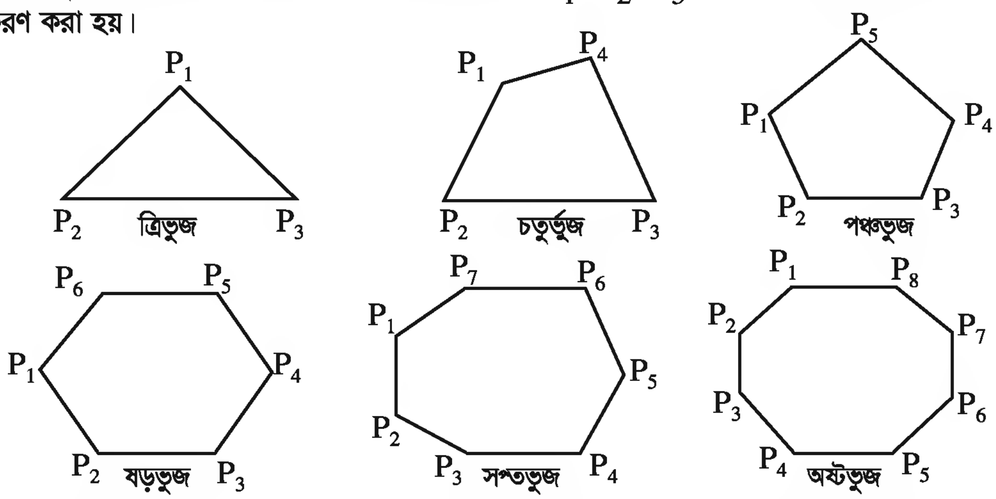
বর্গ : আয়তের কোনো এক শীর্ষগামী বাহুদ্বয় সমান হলে, তাকে বর্গ বলা হয়।
উল্লেখ্য যে, আয়তের কোনো এক শীর্ষগামী বাহুদ্বয় সমান হলে, তার সকল বাহু সমান হয়।

রম্বস : সামান্তরিকের কোনো এক শীর্ষগামী বাহুদ্বয় সমান হলে এবং একটি কোণ সমকোণ না হলে, তাকে রম্বস বলা হয়।
উল্লেখ্য যে, সামান্তরিকের কোনো এক শীর্ষগামী বাহুদ্বয় সমান হলে তার সব বাহু সমান হয় এবং একটি কোণ সমকোণ না হলে কোনো কোণই সমকোণ হয় না।

ট্রাপিজিয়াম : যে চতুর্ভুজের কেবলমাত্র দুইটি বাহু সমান্তরাল, তাকে ট্রাপিজিয়াম বলা হয়। ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের একটিকে ভূমি এবং অসমান্তরাল বাহুদ্বয়কে তির্যক বাহু বলা হয়। ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় সমান হলে একে সমদ্বিবাহু ট্রাপিজিয়াম বলা হয়।
উল্লেখ্য যে, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় কখনও সমান হতে পারে না।

১.১৫। বহুভুজ

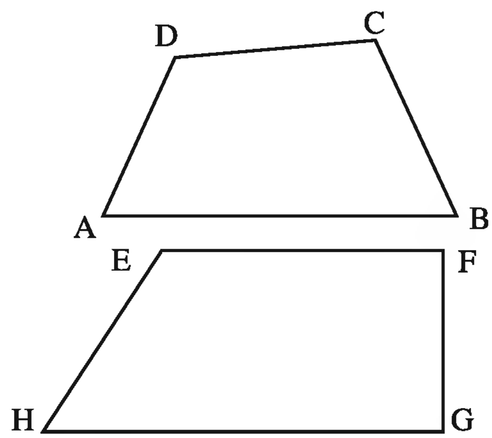
সমতলস্থ কতিপয় বিন্দুকে ক্রমিকভাবে নির্দেশের জন্য অনেক সময় $P_1, P_2, P_3, \ldots\ldots\ldots$ ইত্যাদি প্রতীক দ্বারা বিন্দুগুলোর নামকরণ করা হয়।



ওপরের চিত্রগুলো প্রত্যেকটি বহুভুজ। বাহুর সংখ্যা অনুযায়ী এদের নাম করা হয়। n সংখ্যক (যেখানে $n \geq 3$) বাহুবিশিষ্ট বহুভুজকে সংক্ষেপে n–ভুজ বলা হয়।

সংজ্ঞা : ধরি $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, P_n$ একই সমতলস্থ n সংখ্যক বিন্দু যেখানে $n \geq 3$। তাহলে $P_1 P_2, P_2 P_3, \ldots\ldots\ldots\ldots P_{n-1} P_n$, রেখাংশগুলোর সংযোগকে n বাহুবিশিষ্ট একটি বহুভুজ বলা হয়, যদি–
(ক) রেখাংশগুলোর কোনো দুইটির একটি সাধারণ বিন্দু থাকলে তা তাদের একটি প্রান্তবিন্দু হয়,
(খ) রেখাংশগুলোর যে দুইটির একটি সাধারণ প্রান্তবিন্দু আছে তাদের ধারক রেখা ভিন্ন হয় এবং
(গ) রেখাংশগুলোর প্রত্যেকটির ধারক রেখার একই পার্শ্বে ঐ রেখাংশের প্রান্তবিন্দু ছাড়া অন্য প্রদত্ত বিন্দুগুলো অবস্থিত হয়।
এই বহুভুজকে $P_1 P_2 P_3 \ldots\ldots\ldots P_n$, নামে অভিহিত করা হয় এবং $P_1, P_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, P_n$ বিন্দুগুলোকে তার শীর্ষ এবং $P_1 P_2, P_2 P_3, \ldots\ldots, Pn\, P_1$ রেখাংশগুলোকে তার বাহু বলা হয়। প্রত্যেক শীর্ষে সংশ্লিষ্ট বাহু দুইটির অন্তর্গত কোণকে বহুভুজটির একটি কোণ বলা হয়। $n = 3, 4, 5, 6, 7, 8$ এর জন্য বহুভুজটিকে যথাক্রমে ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ, ষড়ভুজ, সপ্তভুজ, অষ্টভুজ বলা হয়।

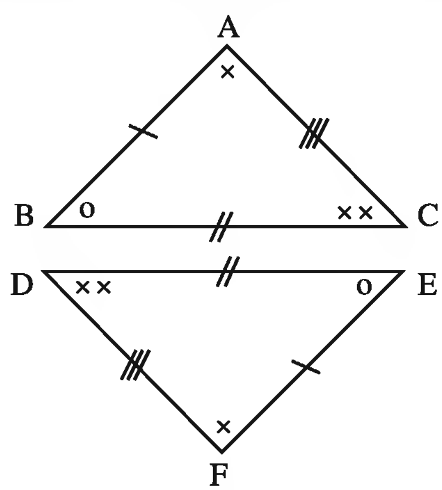
দুইটি বহুভুজের সর্বসমতা



সমসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে কোনো ক্রম অনুসারে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে মিল করা হলে বহুভুজ দুইটির অনুরূপ কোণ ও অনুরূপ বাহু নির্দিষ্ট হয়। যেমন, ABCD চতুর্ভুজ এবং EFGH চতুর্ভুজ দুইটির শীর্ষবিন্দুগুলোর মধ্যে $A \leftrightarrow E$, $B \leftrightarrow F$, $C \leftrightarrow G$, $D \leftrightarrow H$ মিল বিবেচনা করা হলে $\angle A$ ও $\angle E$, $\angle B$ ও $\angle F$, $\angle C$ ও $\angle G$, $\angle D$ ও $\angle H$ অনুরূপ কোণ হয় এবং AB ও EF, BC ও FG, CD ও GH, DA ও HE অনুরূপ বাহু হয়।

মন্তব্য। ওপরে বর্ণিত চতুর্ভুজ দুইটির মিলকরণকে সংক্ষেপে $ABCD \leftrightarrow EFGH$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

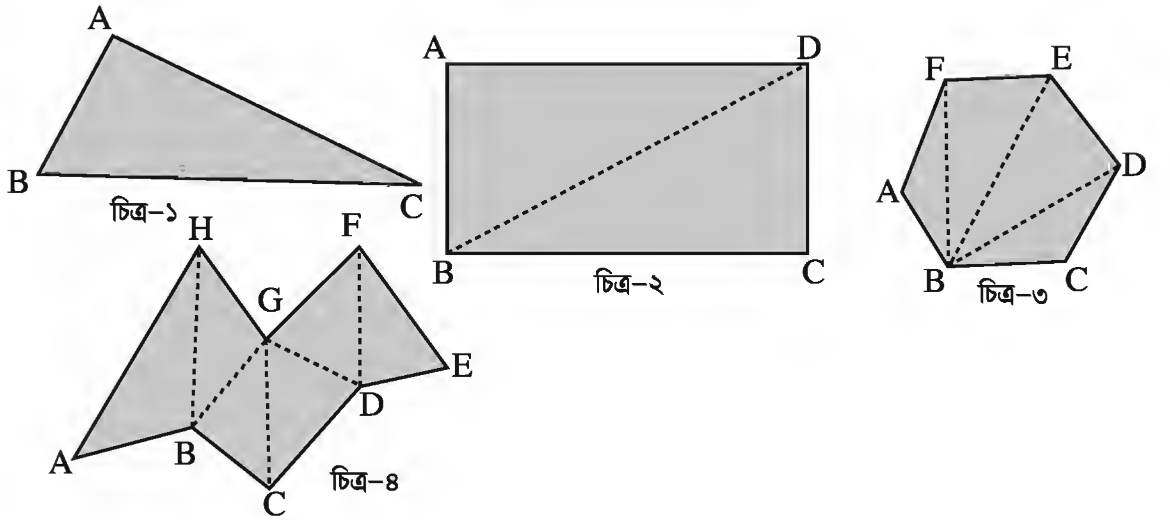
সংজ্ঞা : সমসংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের কোণ মিলকরণের ফলে যদি অনুরূপ কোণগুলো সমান (পরিমাপ অর্থে) হয় এবং অনুরূপ বাহুগুলো সমান (দৈর্ঘ্য অর্থে) হয়, তবে বহুভুজ দুইটিকে সর্বসম বলা হয়।



ওপরের চিত্রের ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম যেখানে $ABC \leftrightarrow FED$ মিলকরণের ফলে $\angle A = \angle F$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle D$ এবং $AB = FE$, $BC = ED$, $AC = FD$ হয়েছে।

মন্তব্য। অনেক সময় ওপরে বর্ণিত মিলকরণ প্রক্রিয়াকে উপরিপাতন প্রক্রিয়া হিসেবে বর্ণনা করা হয়, যেখানে একটি চিত্রকে অপরটির ওপর স্থাপন করা হয়েছে বলে কল্পনা করা হয়।

১.১৬। সরল রৈখিক ক্ষেত্র



চিত্র–১ চিত্র–২ চিত্র–৩ চিত্র–৪

ওপরের প্রত্যেকটি চিত্র সমতলস্থ সরল রৈখিক ক্ষেত্রের প্রতিরূপ। চিত্র–১ একটি ত্রিভুজক্ষেত্র, চিত্র–২ একটি চতুর্ভুজক্ষেত্র, (আয়তক্ষেত্র) এবং চিত্র–৩ একটি ষড়ভুজক্ষেত্র, যাদের সীমারেখা যথাক্রমে ΔABC, $\square$ ABCD এবং ষড়ভুজ ABCDEF। এরা প্রত্যেকেই এবং চিত্র–৪ সরল রৈখিক ক্ষেত্র। এরূপ ক্ষেত্রের সীমারেখা কতকগুলো রেখাংশের সংযোগে গঠিত।

সংজ্ঞা : সমতলস্থ কোনো ত্রিভুজ ও তার অভ্যন্তরের সংযোগে গঠিত সমতলের উপসেটটিকে একটি ত্রিভুজক্ষেত্র বলা হয়। ত্রিভুজটি এই ত্রিভুজক্ষেত্রের সীমারেখা যা ত্রিভুজক্ষেত্রটির অন্তর্ভুক্ত। যে ত্রিভুজক্ষেত্রের সীমারেখা ΔABC, তাকে Δ ক্ষেত্র ABC বলে অভিহিত করা হয়।

সংজ্ঞা : সমতলস্থ কোনো বহুভুজ ও তার অভ্যন্তরের সংযোগে গঠিত সমতলের উপসেটটিকে একটি বহুভুজক্ষেত্র এবং বহুভুজটিকে ক্ষেত্রটির সীমারেখা বলা হয়।

বহুভুজের প্রকৃতি অনুযায়ী ক্ষেত্রটি ত্রিভুজক্ষেত্র, চতুর্ভুজক্ষেত্র, আয়তক্ষেত্র, বর্গক্ষেত্র, পঞ্চভুজক্ষেত্র ইত্যাদি হয়। লক্ষণীয় যে, প্রত্যেক বহুভুজক্ষেত্রকে কতকগুলো ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করা যায় যেখানে দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্র হয় নিশ্ছেদ অথবা তাদের ছেদ একটি রেখাংশ বা একটি বিন্দু।

সংজ্ঞা : সমতলের একটি উপসেটকে সরল রৈখিক ক্ষেত্র বলা হয় যদি সেটটি সসীম সংখ্যক ত্রিভুজক্ষেত্রের সংযোগে গঠিত হয় যেখানে ত্রিভুজক্ষেত্রগুলোর যেকোনো দুইটি হয় নিশ্ছেদ অথবা তাদের ছেদ একটি রেখাংশ বা একটি বিন্দু।

ওপরের প্রদত্ত চিত্র–৪ একটি সরল রৈখিক ক্ষেত্র যার সীমারেখা AB, BC, CD, DE, EF, FG, GH ও HA রেখাংশগুলোর সংযোগে গঠিত সমতলের একটি বন্ধ বহুরেখা (Closed polygonal line)। সীমারেখাটিও সরল রৈখিক ক্ষেত্রটির অন্তর্ভুক্ত।

সংজ্ঞা : $P_1, P_2, P_3, \ldots.., P_{n-1}, P_n$, সমতলস্থ n সংখ্যক $(n \geq 2)$ ভিন্ন বিন্দু হলে $\overline{P_1P_2}, \overline{P_2P_3}, \overline{P_{n-1}P_n}$ ও $\overline{P_nP_1}$ রেখাংশগুলোর সংযোগে গঠিত সমতলের উপসেটটিকে একটি বন্ধ বহুরেখা বলা হয়, যদি কোনো দুইটি রেখাংশেরই প্রান্ত বিন্দু ছাড়া অন্য কোনো সাধারণ বিন্দু না থাকে।

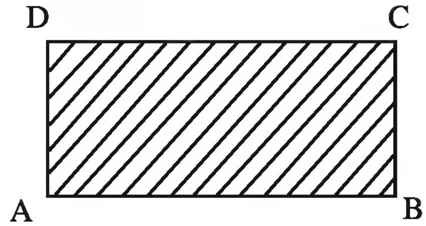
ক্ষেত্রফল

এ পর্যায়ে আমরা স্বীকার করে নিই যে,

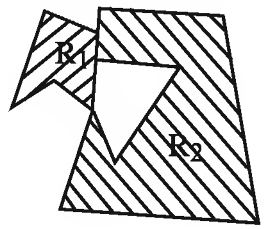
স্বীকার্য। (ক) সমতলস্থ প্রত্যেক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের জন্য একটি অনন্য ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা নির্দিষ্ট করা যায়। (এই সংখ্যাটিকে ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল বলা হবে।)

(খ) যদি দুইটি বহুভুজ সর্বসম হয়, তবে তাদের দ্বারা সীমাবদ্ধ বহুভুজক্ষেত্র দুইটির ক্ষেত্রফল সমান।

(গ) ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AB × BC



(ঘ) যদি দুইটি সরল রৈখিক ক্ষেত্র R_1 ও R_2 এমন হয় যে তারা বড়জোর সসীম সংখ্যক রেখাংশে অথবা বিন্দুতে ছেদ করে এবং তাদের সংযোগে সরল রৈখিক ক্ষেত্র গঠিত হয়, তবে R-ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = R_1 ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + R_2 ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।



অনুশীলনী–১

১। স্থান, তল, রেখা এবং বিন্দুর ধারণা বর্ণনা কর।

২। শূন্যস্থান পূরণ কর :
- (i) স্থান সকল বিন্দুর ——— এবং সমতল ও ——— এই সেটের উপসেট।
- (ii) দুইটি ভিন্ন ——— জন্য একটি ও কেবল মাত্র একটি সরলরেখা আছে যাতে উভয় ——— অবস্থিত।
- (iii) একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এমন ——— ভিন্ন বিন্দুর জন্য একটি ও কেবল একটি সমতল আছে যাতে ——— তিনটি অবস্থিত।
- (iv) কোনো সমতলের দুইটি ভিন্ন ভিন্ন বিন্দু দিয়ে যায় এমন ——— ঐ সমতলে অবস্থিত।
- (v) একাধিক সমতল বিদ্যমান, প্রত্যেক সমতলে একাধিক ——— অবস্থিত।

৩। আপতন স্বীকার্যগুলো বর্ণনা কর।

৪। সমতল জ্যামিতি কী?

৫। শূন্যস্থান পূরণ কর :
- (i) A ও B ভিন্ন বিন্দু হলে AB সংখ্যাটি ———। অন্যথায় AB = 0
- (ii) A থেকে B এর দূরত্ব এবং B থেকে A এর দূরত্ব ———।

৬। দূরত্ব স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

৭। রুলার স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

৮। সংখ্যারেখা বর্ণনা কর। সংখ্যারেখায় কোনো সংখ্যা P এর লেখবিন্দু এবং কোনো বিন্দুর স্থানাঙ্ক ব্যাখ্যা কর।

৯। রুলার স্থাপন স্বীকার্য বর্ণনা কর।

১০। পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখা এবং সমান্তরাল সরলরেখার সংজ্ঞা বর্ণনা কর।

১১। শূন্যস্থান পূরণ কর :

(i) দুইটি ভিন্ন সরলরেখার সর্বাধিক একটি ——— বিন্দু থাকতে পারে।

(ii) স্বীকার্য ——— অনুযায়ী দুইটি ভিন্ন ——— কেবলমাত্র একটি সরলরেখাতে অবস্থিত থাকতে পারে।

(iii) একই সমতলস্থ দুইটি ভিন্ন সরলরেখা হয় ———, না হয় তারা কেবল এক ——— ছেদ করে।

(iv) তিন বা ততোধিক সরলরেখার কোনো দুইটিই যদি পরস্পরছেদী না হয় তবে তাদের পরস্পর ——— বলা হয়।

(v) তিন বা ততোধিক সরলরেখার যদি একটি সাধারণ বিন্দু থাকে তবে তারা ঐ বিন্দুতে ——— হয়েছে বলা হয়।

১২। যে শর্তে K বিন্দু M ও N বিন্দুর অন্তর্বর্তী বিন্দু হবে তা বর্ণনা কর।

১৩। P, Q, R, S ও T যে শর্তে সমরেখ হবে তা বর্ণনা কর।

১৪। অন্তর্বর্তীতার চারটি বৈশিষ্ট্য উল্লেখ কর।

১৫। রশ্মি, রশ্মির প্রান্ত বিন্দু, রশ্মির ধারক রেখা এবং অন্তঃস্থ বিন্দুর সংজ্ঞা বর্ণনা কর।

১৬। সমরেখ রশ্মি এবং বিপরীত রশ্মির বর্ণনা কর।

১৭। শূন্যস্থান পূরণ কর :

(i) যদি A, B, C বিন্দু তিনটি একই সরলরেখায় অবস্থিত থাকে এবং $AB = 20$, $BC = 7$, $AC = 13$ হয়, তবে C, A ও B এর — বিন্দু হবে।

(ii) A, B, C তিনটি ভিন্ন বিন্দু একই সরলরেখাস্থ না হলে, এদের দ্বারা নির্দিষ্ট সরলরেখা তিনটি হল $\overleftrightarrow{AB}$ ——, ——; রেখাংশ তিনটি হল ——, $\overline{BC}$, ——; রশ্মি ছয়টি হল ——, $\overrightarrow{BA}$, ——, ——, $\overrightarrow{AC}$, ——।

১৮। নিম্নের কোনটি সত্য এবং কোনটি মিথ্যা তা ব্যাখ্যা কর :

(i) $\overleftrightarrow{PQ} = \overleftrightarrow{QP}$, (ii) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{QP}$, (iii) $\overline{PQ} = \overline{QP}$, (iv) $PQ = QP$.

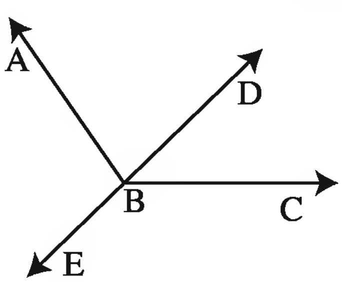
১৯। যদি A, B এবং C তিনটি ভিন্ন বিন্দু হয়, তবে $AB + BC = AC$ শর্তের জন্য নিম্নলিখিত কোনটি সত্য এবং কোনটি মিথ্যা তা নির্ণয় কর :

(i) A-B-C, (ii) A-C-B, (iii) B-C-A, (iv) B-A-C, (v) C-A-B, (vi) C-B-A,

২০। তল বিভাজনের স্বীকার্যটি বর্ণনা কর।

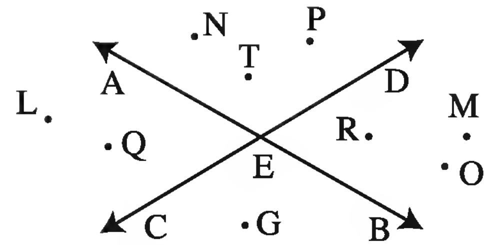
২১। কোণ ও কোণের বাহু এবং কোণের শীর্ষবিন্দুর সংজ্ঞা বর্ণনা কর।

২২। যদি D, B, E একই সরলরেখাস্থ তিনটি ভিন্ন বিন্দু হয়, তবে চিত্রের উৎপন্ন কোণগুলোর নামকরণ কর।



২৩। কোণের অভ্যন্তর এবং বহির্ভাগের সংজ্ঞা বর্ণনা কর।

২৪। পাশের চিত্রের কোণ চারটির কোন কোন বিন্দু কোণের অভ্যন্তরে এবং বহির্ভাগে তা নির্ণয় কর :



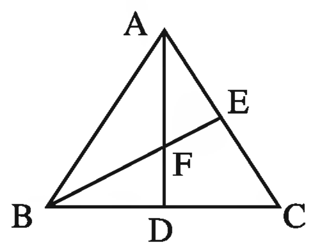
২৫। ওপরের চিত্রে, কোন কোন বিন্দু কোণের অভ্যন্তরেও নয়, বহির্ভাগেও নয়, তা নির্ণয় কর।

২৬। সন্নিহিত কোণের সংজ্ঞা দাও। চিত্রের সাহায্যে এর বহিঃস্থ বাহুসহ ব্যাখ্যা কর।

২৮। নিম্নলিখিতগুলোর সংজ্ঞা দাও এবং চিত্রের সাহায্যে প্রত্যেকটির ব্যাখ্যা কর :
বিপ্রতীপ কোণ, সরলকোণ, পূরক কোণ, সম্পূরক কোণ, সমকোণ, লম্ব, সূক্ষ্মকোণ এবং স্থূলকোণ।

২৯। একান্তর কোণ, অনুরূপ কোণ এবং প্রবৃদ্ধ কোণ তিনটি চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা কর।

৩১। নিম্নের চিত্রে প্রদর্শিত ত্রিভুজগুলোর নামকরণ কর।



৩২। ওপরের চিত্রে প্রদর্শিত ত্রিভুজগুলোর মোট কোণের সংখ্যা এবং বাহুর সংখ্যা উল্লেখ কর।

৩৩। ত্রিভুজের অভ্যন্তর এবং বহির্ভাগের সংজ্ঞা দাও।

৩৪। সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং তার ভূমি ও তার শিরঃকোণের সংজ্ঞা দাও।

৩৫। সংজ্ঞা দাও : সমবাহু ত্রিভুজ, বিষমবাহু ত্রিভুজ, সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজ, স্থূলকোণী ত্রিভুজ।

৩৬। সমকোণী ত্রিভুজ এবং তার অতিভুজ, ভূমি এবং উন্নতির সংজ্ঞাসহ চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা কর।

৩৭। ত্রিভুজের অন্তঃস্থ এবং বহিঃস্থ কোণ চিত্রের সাহায্যে ব্যাখ্যা কর।

৩৮। (i) চতুর্ভুজ এবং বিভিন্ন শ্রেণীর চতুর্ভুজের সংজ্ঞা দাও।
(ii) কোন শর্তে একটি চতুর্ভুজ এবং একটি সামান্তরিক বর্গক্ষেত্র হবে তা উল্লেখ কর।
(iii) কোন শর্তে একটি চতুর্ভুজ আয়ত এবং কোন শর্তে রম্বস তা উল্লেখ কর।

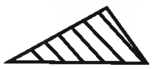
৩৯। চতুর্ভুজ, সামান্তরিক, আয়ত, রম্বস, বর্গ এবং ট্রাপিজিয়াম শব্দগুলোর মধ্যে যেখানে যেটি প্রয়োজন তা দ্বারা নিম্নের শূন্যস্থান পূরণ কর :
(i) বর্গ সর্বদা ———, সামান্তরিক এবং ———
(ii) সামান্তরিক সর্বদা ——— এবং ———
(iii) রম্বস সর্বদা ——— এবং ———
(iv) আয়ত সর্বদা ——— এবং ———
(v) ট্রাপিজিয়াম একটি ———।

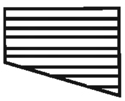
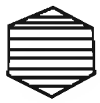
৪০। শূন্যস্থান পূরণ কর :

(i) ত্রিভুজের তিনটি কোণ সূক্ষ্মকোণ হলে, তাকে ——— ত্রিভুজ বলে।
(ii) যে ত্রিভুজের এক কোণ ———, তাকে সমকোণী ত্রিভুজ বলে।
(iii) যে ত্রিভুজের তিন বাহুই অসমান, তাকে ——— ত্রিভুজ বলে।
(iv) ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় কখনও ——— হতে পারে না।

৪১। বহুভুজের সংজ্ঞা দাও।

৪২। শূন্যস্থান পূরণ কর :

 কে ——— ভুজ,  কে ——— ভুজ,

 কে ——— ভুজ,  কে ——— ভুজ বলে।

৪৩। দুইটি বহুভুজ কখন সর্বসম হবে তা ব্যাখ্যা কর।

৪৪। $ABC \leftrightarrow DEF$ দ্বারা কী বোঝায় তা বর্ণনা কর।

৪৫। $ABC \leftrightarrow DEF$ এর ফলে ΔABC ও ΔDEF এর অনুরূপ কোণগুলো ও অনুরূপ বাহুগুলো বর্ণনা কর।

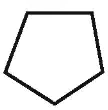
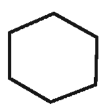
৪৬। ত্রিভুজক্ষেত্রের সংজ্ঞা বর্ণনা কর।

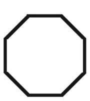
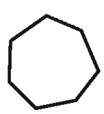
৪৭। বহুভুজক্ষেত্রের সংজ্ঞা বর্ণনা কর।

৪৮। সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সংজ্ঞা বর্ণনা কর।

৪৯। বদ্ধ বাহু রেখার সংজ্ঞা বর্ণনা কর।

৫০। শূন্যস্থান পূরণ কর :

 কে ——— বলে,  কে ——— বলে,

 কে ——— বলে,  কে ——— বলে।

দ্বিতীয় অধ্যায়

রেখা, কোণ, ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সম্পর্কিত উপপাদ্য

রেখা, কোণ, ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সম্পর্কিত ১ থেকে ১৯ পর্যন্ত পূর্ব অধীত উপপাদ্যগুলো ব্যবহারের সুবিধার্থে পুনরুল্লেখ করা হল।

উপপাদ্য–১
একটি রশ্মির প্রান্ত বিন্দুতে অপর একটি সরলরেখা মিলিত হলে, যে দুইটি সন্নিহিত কোণ উৎপন্ন হয়, এদের সমষ্টি দুই সমকোণ।

উপপাদ্য–২
দুইটি সন্নিহিত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হলে, এদের বহিঃস্থ বাহুদ্বয় একই সরলরেখায় অবস্থিত।

উপপাদ্য–৩
দুইটি সরলরেখা পরস্পর ছেদ করলে উৎপন্ন বিপ্রতীপ কোণগুলো পরস্পর সমান।

উপপাদ্য–৪
একটি সরলরেখা অপর দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে ছেদ করলে
ক) একান্তর কোণ দুইটি সমান হবে
খ) অনুরূপ কোণ দুইটি সমান হবে এবং
গ) ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণ হবে।

উপপাদ্য–৫
দুইটি সরলরেখাকে অপর একটি সরলরেখা ছেদ করলে, যদি
ক) একান্তর কোণগুলো সমান হয়, অথবা
খ) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয়, অথবা
গ) ছেদকের একই পাশের অন্তঃস্থ কোণ দুইটির সমষ্টি দুই সমকোণের সমান হয়, তবে ঐ রেখা দুইটি সমান্তরাল হবে।

উপপাদ্য–৬
যেসব রেখা একই সরলরেখার সমান্তরাল তারা পরস্পর সমান্তরাল।

উপপাদ্য–৭
যদি দুইটি ত্রিভুজের একটির দুই বাহু যথাক্রমে অপরটির দুই বাহুর সমান হয় এবং বাহু দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণ দুইটি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

উপপাদ্য–৮
যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি বাহু পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত কোণ দুইটিও পরস্পর সমান হবে।

উপপাদ্য–৯
যদি কোনো ত্রিভুজের দুইটি কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে এদের বিপরীত বাহুদ্বয়ও পরস্পর সমান হবে।

উপপাদ্য–১০
যদি একটি ত্রিভুজের তিন বাহু অপর একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

উপপাদ্য–১১
কোনো ত্রিভুজের একটি বাহু অপর একটি বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর বাহুর বিপরীত কোণ ক্ষুদ্রতর বাহুর বিপরীত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

উপপাদ্য–১২
কোনো ত্রিভুজের একটি কোণ অপর একটি কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হলে, বৃহত্তর কোণের বিপরীত বাহু ক্ষুদ্রতর কোণের বিপরীত বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

উপপাদ্য–১৩
ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি, তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

উপপাদ্য–১৪
কোনো সরলরেখার বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে উক্ত সরলরেখা পর্যন্ত যতগুলো রেখাংশ টানা যায় তন্মধ্যে লম্ব রেখাংশটি ক্ষুদ্রতম।

উপপাদ্য–১৫
ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

উপপাদ্য–১৬
যদি একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ ও একটি বাহু যথাক্রমে অপর একটি ত্রিভুজের দুইটি কোণ এবং অনুরূপ বাহুর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হবে।

উপপাদ্য–১৭
দুইটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজদ্বয় সমান হলে এবং একটির এক বাহু অপরটির অপর এক বাহুর সমান হলে ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ২.১। ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

অনুসিদ্ধান্ত ২.২। ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে উৎপন্ন বহিঃস্থ কোণটি অন্তঃস্থ বিপরীত কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি অপেক্ষা বৃহত্তর হবে।

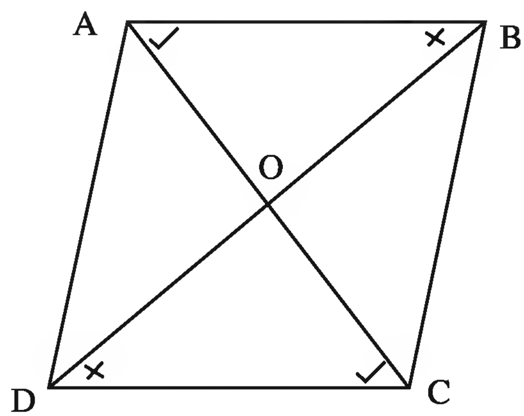
উপপাদ্য–১৮
চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত বাহু সমান ও সমান্তরাল হলে, তার অপর বাহু দুইটিও সমান ও সমান্তরাল হবে।

উপপাদ্য–১৯
সামান্তরিকের বিপরীত বাহুগুলো ও কোণগুলো পরস্পর সমান এবং প্রত্যেক কর্ণ সামান্তরিককে দুইটি সর্বসম ত্রিভুজে বিভক্ত করে।

অনুসিদ্ধান্ত ২.৩। সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

অনুসিদ্ধান্ত ২.৪। রম্বসের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ABCD রম্বসের AC এবং BD কর্ণদ্বয় পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে,



(১) $AO = CO$ এবং $BO = DO$;

(২) $\angle AOB = \angle AOD = \angle COB = \angle COD$ = এক সমকোণ।

প্রমাণ : AB ও DC রেখাদ্বয় সমান্তরাল এবং AC ও BD তাদের দুইটি ছেদক।

অতএব, $\angle BAC = \angle ACD$ [একান্তর কোণ]

এবং $\angle BDC = \angle ABD$ [ঐ]

ΔAOB ও ΔCOD এ

$\angle OAB = \angle OCD$, $\angle OBA = \angle ODC$ এবং $AB =$ অনুরূপ DC.

সুতরাং, $\Delta AOB \cong \Delta COD$.

অতএব, $AO = CO$ এবং $BO = DO$.

এখন, ΔAOB ও ΔAOD এ

$AB = AD$, $BO = DO$ এবং AO সাধারণ বাহু।

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta AOD$

$\therefore \angle AOB = \angle AOD$

আবার, $\angle AOB + \angle AOD$ = এক সরলকোণ।

অতএব, $\angle AOB = \angle AOD$ = এক সমকোণ।

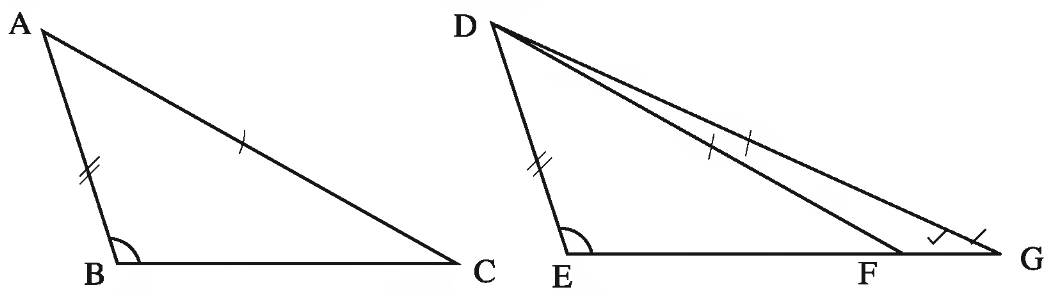
আবার, $\angle COD$ = বিপ্রতীপ $\angle AOB$ = এক সমকোণ।

অতএব, $\angle AOB = \angle AOD = \angle COB = \angle COD$ = এক সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ২.৫। ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।

অনুসিদ্ধান্ত ২.৬। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো মধ্যমা ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

উদাহরণ ২.১। প্রমাণ কর যে, যদি একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণ, স্থূলকোণের বিপরীত বাহু ও অপর এক বাহু যথাক্রমে অপর একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূলকোণ ও অনুরূপ দুই বাহুর সমান হয়, তবে স্থূলকোণী ত্রিভুজদ্বয় সর্বসম হবে।



মনে করি, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ে ABC ও DEF কোণদ্বয় স্থূলকোণ।

ΔABC ও ΔDEF-এ $\angle ABC = \angle DEF$, $AC = DF$ এবং $AB = DE$.

প্রমাণ করতে হবে যে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$.

প্রমাণ : এখন, $\angle BAC$, $\angle EDF$ এর সমান হতে পারে, কিংবা, সমান নাও হতে পারে।

(i) মনে করি, $\angle BAC = \angle EDF$

এখন, ABC ও DEF ত্রিভুজদ্বয়ে,

$AB = DE$, $AC = DF$ এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle EDF$.

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF$.

(ii) মনে করি, $\angle BAC \neq \angle EDF$. ধরি, $\angle BAC > \angle EDF$. অথবা, $\angle BAC < \angle EDF$

অঙ্কন : (ক) ধরি, $\angle BAC > \angle EDF$. $\angle BAC$ এর সমান $\angle EDG$ আঁকি।

মনে করি, রশ্মি DG, EG রশ্মিকে G বিন্দুতে ছেদ করে।

$\angle BAC > \angle EDF$ বলে G, EF রেখাংশের বহিঃস্থ বিন্দু হবে।

এখন, ABC ও DEG ত্রিভুজদ্বয়ে,

$AB = DE$, $\angle ABC = \angle DEG$ ও $\angle BAC = \angle EDG$.

$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEG$.

অতএব, $AC = DG$.

কিন্তু $AC = DF$ [দেওয়া আছে]

$\therefore DF = DG$

অতএব, $\angle DGF = \angle DFG$. এ কোণদ্বয়ের প্রত্যেকটি সূক্ষ্মকোণ হবে

[কারণ যেকোনো ত্রিভুজে দুইটি কোণ সমান স্থূলকোণ অথবা সমকোণ হতে পারে না।]

$\therefore \angle DFE$ স্থূলকোণ [$\because$ $\angle DFE$, $\angle DFG$ এর সম্পূরক।]

এখন, ΔDEF এ $\angle DEF$ ও $\angle DFE$ উভয়েই স্থূলকোণ, যা অসম্ভব।

$\therefore \angle BAC > \angle EDF$ হতে পারে না।

(খ) ধরি, $\angle BAC < \angle EDF$ এক্ষেত্রে (ক) এর অনুরূপভাবে,

$\angle BAC$ এর সমান $\angle EDG'$ অঙ্কন করলে G' বিন্দু EF রেখাংশস্থিত বিন্দু হবে এবং

সেক্ষেত্রে $\Delta DEG'$ এ $\angle DEG'$ ও $\angle DG'E$ উভয়ই স্থূলকোণ হবে যা অসম্ভব।

$\therefore \angle BAC < \angle EDF$ হতে পারে না।

অতএব, $\angle BAC = \angle EDF$.

তাহলে (i) নং অনুযায়ী, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$. [প্রমাণিত]

অনুশীলনী–২

১। প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শিরঃকোণের সমদ্বিখণ্ডক ভূমিকেও সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং ভূমির ওপর লম্ব হয়।

২। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দুসমূহ যোগ করলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়, তা সমবাহু হবে।

৩। প্রমাণ কর যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমা তিনটি পরস্পর সমান।

৪। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুইটি বহিঃস্থ কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

৫। ΔABC এর অভ্যন্তরে D একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $AB + AC > BD + DC$.

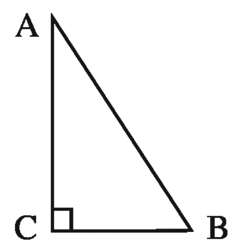
৬। ΔABC এর BC বাহুর মধ্যবিন্দু D হলে, প্রমাণ কর যে, $AB + AC > 2AD$.

৭। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের মধ্যমাত্রয়ের সমষ্টি তার পরিসীমা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

৮। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজে, A শীর্ষবিন্দু এবং BA বাহুকে D পর্যন্ত এরূপভাবে বর্ধিত করা হল, যেন $BA = AD$; প্রমাণ কর যে, $\angle BCD$ একটি সমকোণ।

৯। ΔABC এর $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়।
প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$.

১০। ΔABC এর AB ও AC বাহুকে বর্ধিত করলে B ও C বিন্দুতে যে বহিঃকোণ দুইটি উৎপন্ন হয়, তাদের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি O বিন্দুতে মিলিত হলে,
প্রমাণ কর যে, $\angle BOC = 90^\circ - \frac{1}{2}\angle A$.



১১। চিত্রে, দেওয়া আছে, $\angle C$ = এক সমকোণ
এবং $\angle B = 2\angle A$
প্রমাণ কর যে, $AB = 2BC$

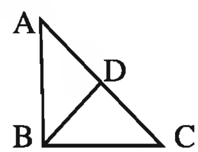
১২। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল এবং দৈর্ঘ্যে তার অর্ধেক।

১৩। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণদ্বয়ের সমষ্টির সমান।

১৪। ΔABC এর B ও C শীর্ষ থেকে বিপরীত বাহুর ওপর অঙ্কিত লম্ব যথাক্রমে BE ও CF।
যদি $BE = CF$ হয়, তবে দেখাও যে, $AB = AC$.

১৫। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো দুই বাহুর অন্তর তার তৃতীয় বাহু অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

১৬। চিত্রে, ABC ত্রিভুজের $\angle B$ = এক সমকোণ
এবং D, অতিভুজ AC এর মধ্যবিন্দু।
প্রমাণ কর যে, $BD = \frac{1}{2}AC$.



১৭। ΔABC এ $AB > AC$ এবং $\angle A$ এর সমদ্বিখণ্ডক AD, BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ কর যে, $\angle ADB$ স্থূলকোণ।

১৮। কোনো সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডকের উপরিস্থিত যেকোনো বিন্দু উক্ত সরলরেখার প্রান্ত বিন্দুদ্বয় হতে সমদূরবর্তী।

১৯। দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী কোন বিন্দু উক্ত নির্দিষ্ট বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক সরলরেখার লম্বদ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।

২০। প্রমাণ কর যে, চতুর্ভুজের কর্ণদ্বয়ের সমষ্টি তার পরিসীমার অর্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর।

২১। দেখাও যে, চতুর্ভুজের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করলে একটি সামান্তরিক উৎপন্ন হয়।

২২। দেখাও যে, রম্বসের বাহুগুলোর মধ্যবিন্দু পর্যায়ক্রমে যোগ করলে একটি আয়ত উৎপন্ন হয়।

২৩। কোনো সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সমান হলে, প্রমাণ কর যে, তা একটি আয়ত।

২৪। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

তৃতীয় অধ্যায়

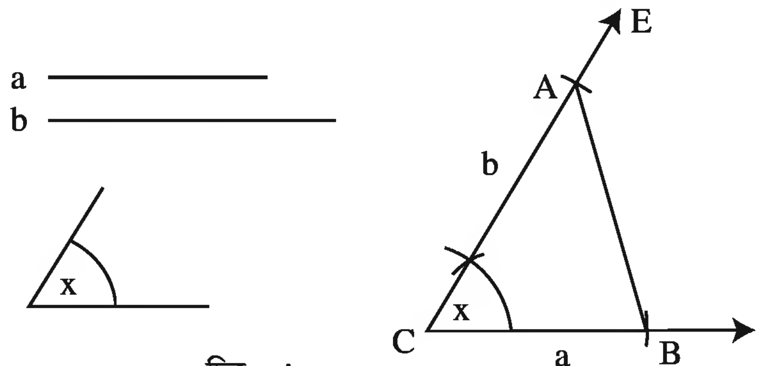
ত্রিভুজ ও চতুর্ভুজ সংক্রান্ত কতিপয় সম্পাদ্য

৩.১। ত্রিভুজ অঙ্কন

প্রত্যেক ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গ আছে; যথা, তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ। তবে কোনো ত্রিভুজের আকার ও আয়তন নির্দিষ্ট করার জন্য ছয়টি অঙ্গের বর্ণনার প্রয়োজন হয় না। পূর্ব অধ্যায়ে উল্লিখিত ত্রিভুজের সর্বসমতা সংক্রান্ত উপপাদ্যগুলো থেকে দেখা যায় যে, কোনো ত্রিভুজের ছয়টি অঙ্গের মধ্যে কেবলমাত্র নিম্নলিখিত তিনটি অঙ্গ, অপর এক ত্রিভুজের অনুরূপ তিনটি অঙ্গের সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয় এবং সেক্ষেত্রে নির্দিষ্ট আকার ও আয়তনের একটি ত্রিভুজই আঁকা যায় :

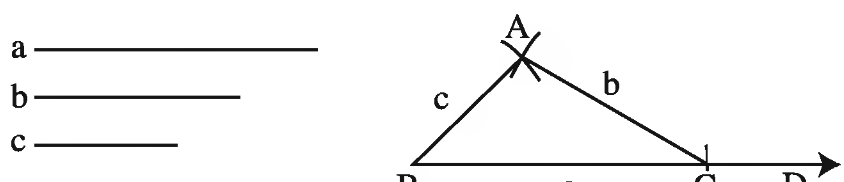
(১) দুইটি বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ (উপপাদ্য–৭);
(২) তিনটি বাহু (উপপাদ্য–১০);
(৩) দুইটি কোণ ও একটি বাহু (উপপাদ্য–১৬);
(৪) দুইটি বাহু ও তাদের একটির বিপরীত কোণ, যেখানে কোণটি সূক্ষ্মকোণ নয় (উপপাদ্য–১৭ ও উদাহরণ ২.১ পৃষ্ঠা নং ২৮)।

যেমন,(১)–এর ক্ষেত্রে,



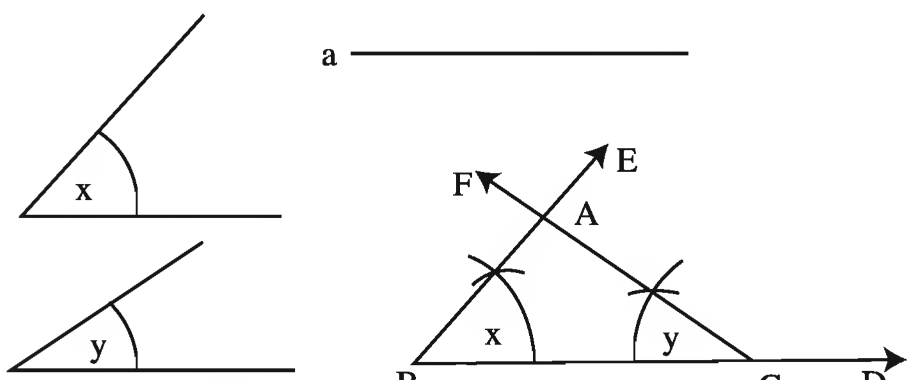
চিত্র – ১

(২)–এর ক্ষেত্রে,



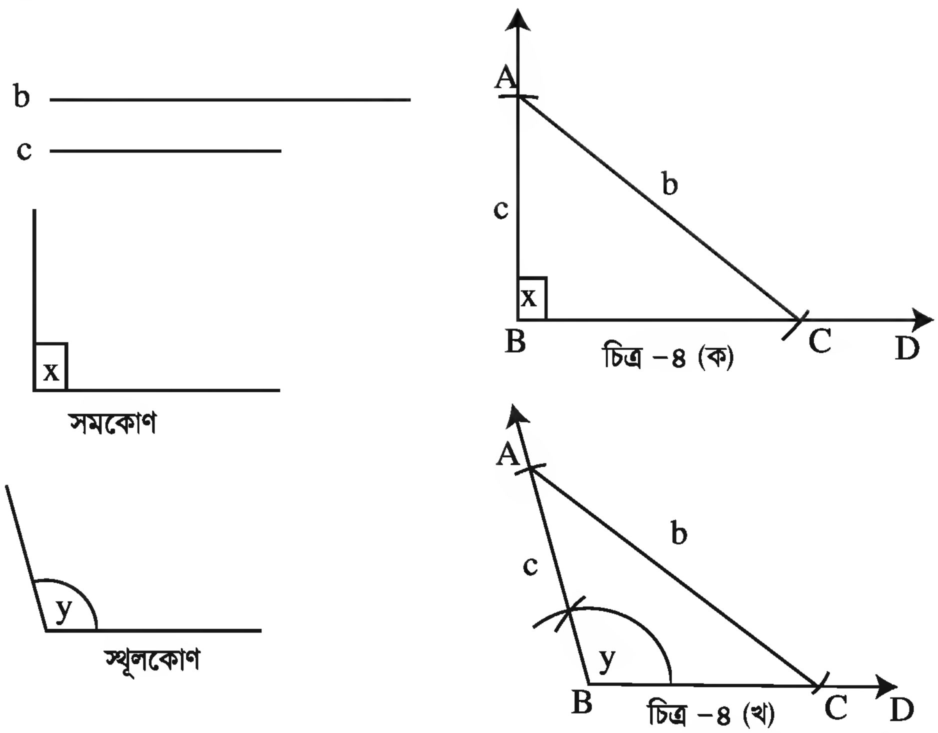
চিত্র – ২

(৩)–এর ক্ষেত্রে,



চিত্র – ৩

(৪)–এর ক্ষেত্রে,

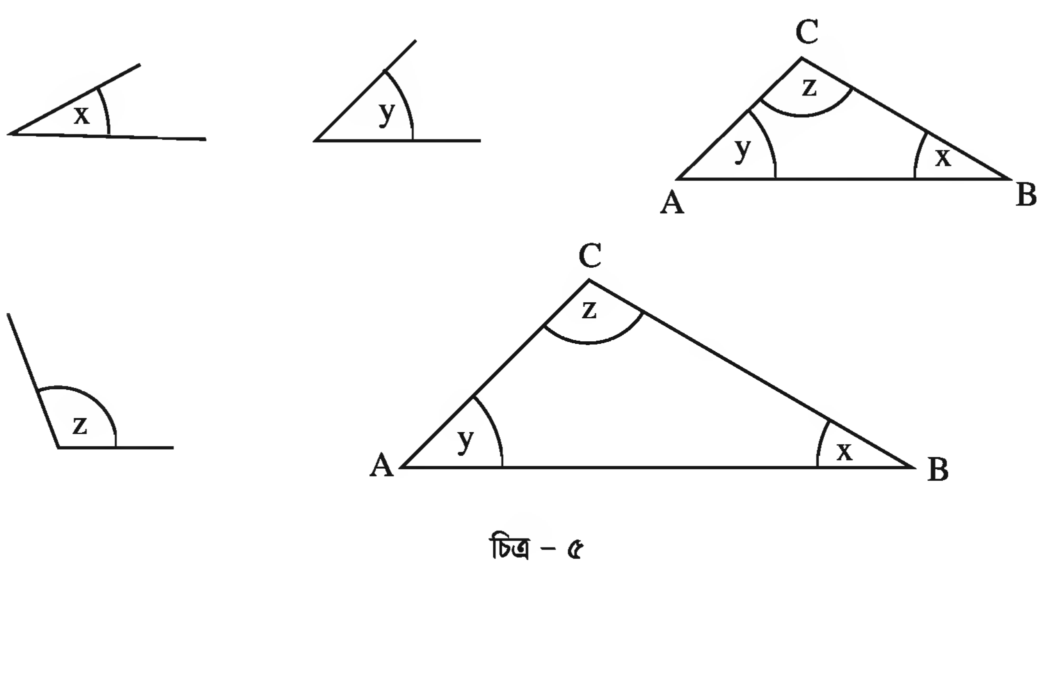


চিত্র –৪ (ক)

চিত্র –৪ (খ)

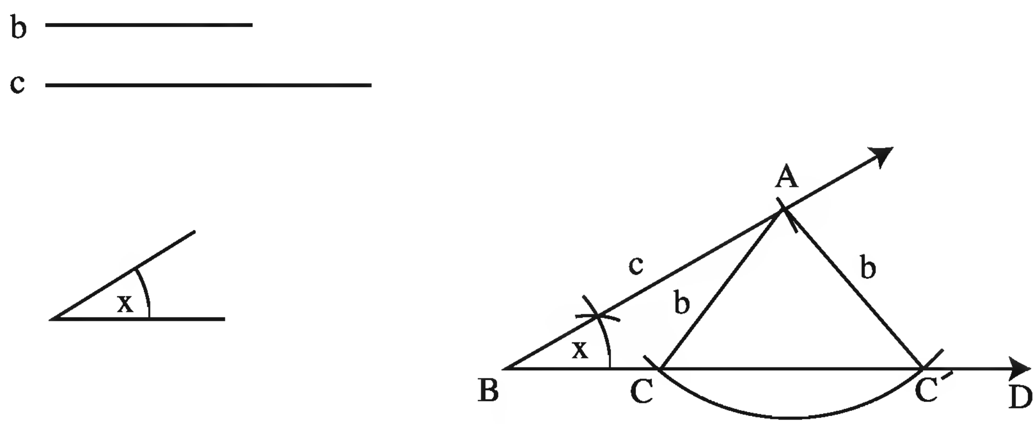
লক্ষণীয় যে, ওপরের প্রত্যেক ক্ষেত্রে ত্রিভুজের তিনটি অঙ্গ নির্দিষ্ট করা হয়েছে। কিন্তু যেকোনো তিনটি অঙ্গ নির্দিষ্ট করলেই ত্রিভুজটি নির্দিষ্ট হয় না। যেমন,

(৫) ত্রিভুজের তিনটি কোণ দেওয়া থাকলে বিভিন্ন আয়তনের অসংখ্য ত্রিভুজ আঁকা যায় (যাদের সদৃশ ত্রিভুজ বলা যায়)।



চিত্র – ৫

(৬) ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও তাদের একটির বিপরীত কোণ দেওয়া থাকলে এবং কোণটি যদি সূক্ষ্মকোণ হয়, তবে দুইটি ত্রিভুজ আঁকা যেতে পারে।

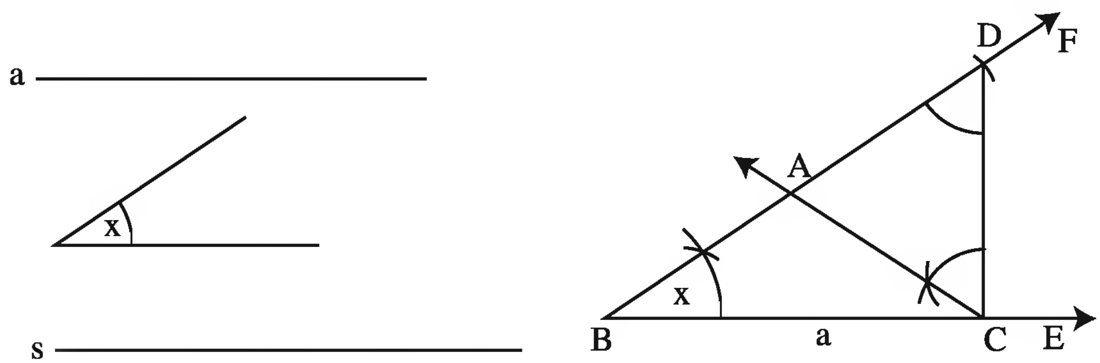


চিত্র – ৬

অনেক সময় ত্রিভুজ আঁকার জন্য এমন তিনটি উপাত্ত দেওয়া থাকে, যাদের সাহায্যে বিভিন্ন অঙ্কনের মাধ্যমে ত্রিভুজটি নির্ধারণ করা যায়। এরূপ কয়েকটি সম্পাদ্য নিচে বর্ণনা করা হল।

সম্পাদ্য–৩.১

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর সমষ্টি s দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BE থেকে a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBF$ আঁকি।

BF রশ্মি থেকে s এর সমান করে BD রেখাংশ কাটি। C, D যোগ করি। C বিন্দুতে DC রেখাংশের যে পাশে B বিন্দু আছে সেই পাশে DC এর সাথে $\angle BDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকি। মনে করি, CA রশ্মি BD রেখাংশকে A বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

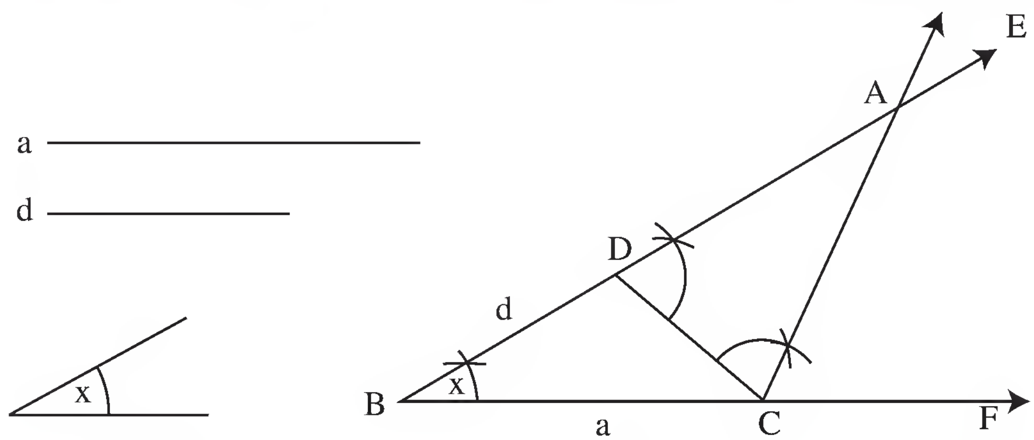
প্রমাণ : ΔACD এ $\angle ADC = \angle ACD$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore AC = AD.$

এখন, Δ ABC এ
$\angle$ ABC = $\angle$ x, BC = a, [অঙ্কন অনুসারে]
এবং BA + AC = BA + AD = BD = s। ∵ [AC = AD]
অতএব, Δ ABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য–৩.২

ত্রিভুজের ভূমি, ভূমি সংলগ্ন একটি সূক্ষ্মকোণ ও অপর দুই বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করি, কোনো ত্রিভুজের ভূমি a, ভূমি সংলগ্ন সূক্ষ্মকোণ $\angle x$ এবং অপর দুই বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

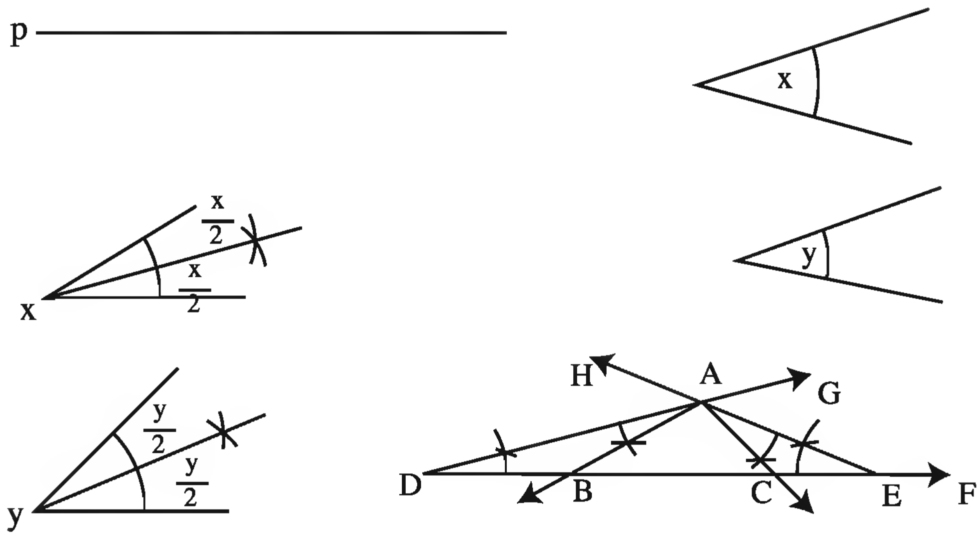
অঙ্কন : যেকোনো একটি রশ্মি BF থেকে ভূমি a এর সমান করে BC রেখাংশ কেটে নিই। BC রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CBE$ আঁকি। BE রশ্মি থেকে d এর সমান BD অংশ কেটে নিই। C, D যোগ করি। DC রেখাংশের যে পাশে E বিন্দু আছে সেই পাশে C বিন্দুতে $\angle EDC$ এর সমান $\angle DCA$ আঁকি। CA রশ্মি BE রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, Δ ABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে, Δ ADC এ
$\angle ADC = \angle ACD$
$\therefore$ AC = AD.
সুতরাং দুই বাহুর অন্তর, AB – AC = AB – AD = BD = d.
এখন, Δ ABC এ
BC = a, AB – AC = d এবং $\angle ABC = \angle x$.
সুতরাং, Δ ABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : প্রদত্ত কোণ সূক্ষ্মকোণ না হলে, ওপরের পদ্ধতিতে অঙ্কন করা সম্ভব নয়।

সম্পাদ্য–৩.৩

ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ ও পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করি, একটি ত্রিভুজের পরিসীমা p এবং ভূমি সংলগ্ন $\angle x$ ও $\angle y$ দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো একটি রশ্মি DF থেকে পরিসীমা p এর সমান করে DE অংশ কেটে নিই। D ও E বিন্দুতে DE রেখাংশের একই পাশে $\frac{1}{2}\angle x = \angle EDG$ এবং $\frac{1}{2}\angle y = \angle DEH$ আঁকি।

মনে করি, $\overrightarrow{DG}$ ও $\overrightarrow{EH}$ রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে A বিন্দুতে ছেদ করে। A বিন্দুতে $\angle ADE$ এর সমান $\angle DAB$ এবং $\angle AED$ এর সমান $\angle EAC$ আঁকি। $\overrightarrow{AB}$ এবং $\overrightarrow{AC}$ রশ্মিদ্বয় DE রেখাংশকে যথাক্রমে B ও C বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : ΔADB এ

$\angle ADB = \angle DAB$, [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore AB = DB.$

আবার, ΔACE এ, $\angle AEC = \angle EAC$

$\therefore CA = CE.$

সুতরাং, ΔABC এ,

$AB + BC + CA = DB + BC + CE = DE = p.$

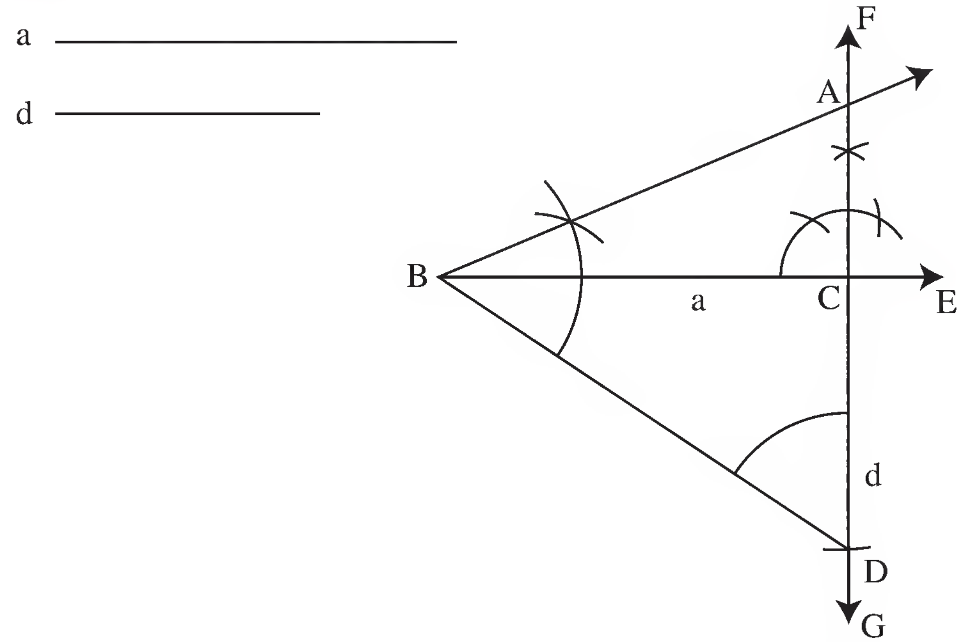
$\angle ABC = \angle ADB + \angle DAB = \frac{1}{2}\angle x + \frac{1}{2}\angle x = \angle x$

এবং $\angle ACB = \angle AEC + \angle EAC = \frac{1}{2}\angle y + \frac{1}{2}\angle y = \angle y.$

সুতরাং ΔABC ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য–৩.৪

সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন একটি বাহু এবং অতিভুজ ও অপর বাহুর অন্তর দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।



মনে করি, একটি সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন এক বাহু a এবং অতিভুজ ও অপর বাহুর অন্তর d দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁকতে হবে।

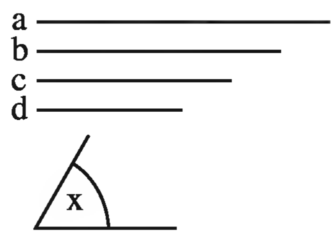
অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি BE থেকে $a = BC$ কাটি। C বিন্দুতে BE এর ওপর লম্ব FG সরলরেখা আঁকি। CG রশ্মি থেকে $d = CD$ অংশ কেটে নিই। B, D যোগ করি। BD রেখাংশের B বিন্দুতে $\angle CDB$ এর সমান $\angle DBA$ আঁকি। BA রশ্মি CF রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, ΔABC ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

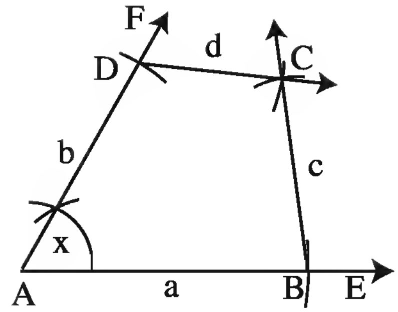
প্রমাণ : ΔABD এ
$\angle ABD = \angle ADB$ [অঙ্কন অনুসারে]
$\therefore AD = AB.$
সুতরাং, $AB - AC = AD - AC = CD = d.$
এখন, ΔABC এ,
$AB - AC = d, BC = a$ এবং $\angle ACB =$ এক সমকোণ।
$\therefore \Delta ABC$ ই নির্ণেয় সমকোণী ত্রিভুজ।

৩.২। চতুর্ভুজ অঙ্কন

আমরা দেখেছি যে, ত্রিভুজের তিনটি উপাত্ত দেওয়া থাকলে অনেক ক্ষেত্রেই ত্রিভুজটি নির্দিষ্টভাবে আঁকা সম্ভব। কিন্তু চতুর্ভুজের চারটি উপাত্ত দেওয়া থাকলে সাধারণত একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকা যায় না।
যেমন, চারটি বাহু দেওয়া থাকলে চতুর্ভুজটি নির্দিষ্ট হয় না। নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকার জন্য পাঁচটি স্বতন্ত্র উপাত্ত প্রয়োজন হয়। যথা,

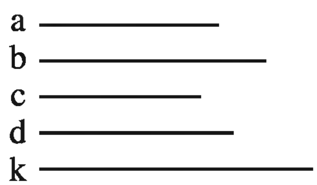
(১) চারটি বাহু ও একটি কোণ,

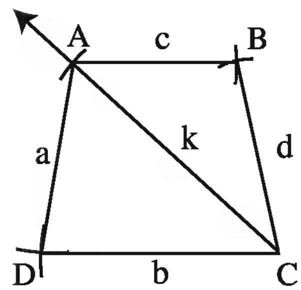




চিত্র – ৭

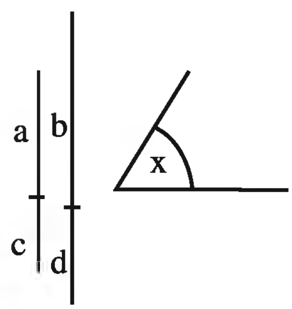
(২) চারটি বাহু ও একটি কর্ণ,

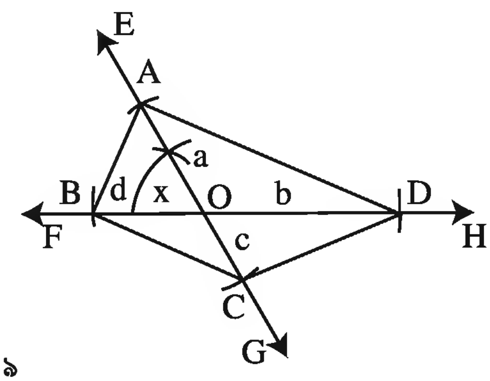




চিত্র – ৮

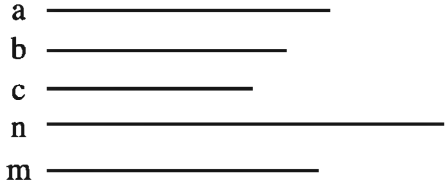
(৩) দুইটি কর্ণের খণ্ডিত অংশসমূহ ও কর্ণ দুইটির অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ,

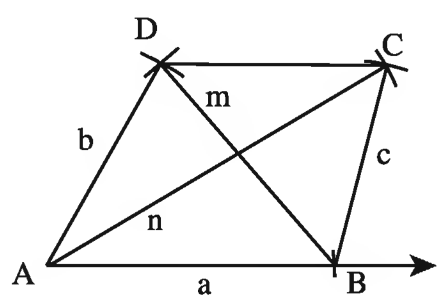




চিত্র – ৯

(৪) তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ,



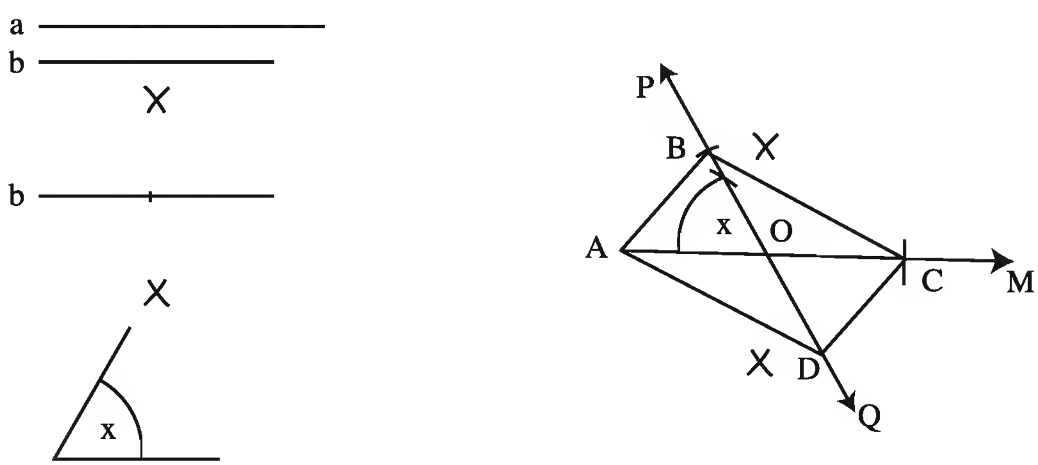


চিত্র – ১০

বিশেষ ধরনের চতুর্ভুজ অঙ্কনের জন্য অনেক সময় এমন উপাত্ত দেওয়া থাকে যা থেকে নির্দিষ্ট চতুর্ভুজ আঁকার জন্য প্রয়োজনীয় পাঁচটি স্বতন্ত্র উপাত্ত পাওয়া যায়। তাহলে ঐ উপাত্তের সাহায্যেও চতুর্ভুজটি আঁকা যায়। যেমন, বর্গের একটি বাহু দেওয়া থাকলে বর্গটি আঁকা যায়। কারণ, তাতে পাঁচটি উপাত্ত–বর্গের চার সমান বাহু ও এক কোণ (সমকোণ) নির্দিষ্ট হয়।

সম্পাদ্য–৩.৫

সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও তাদের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।



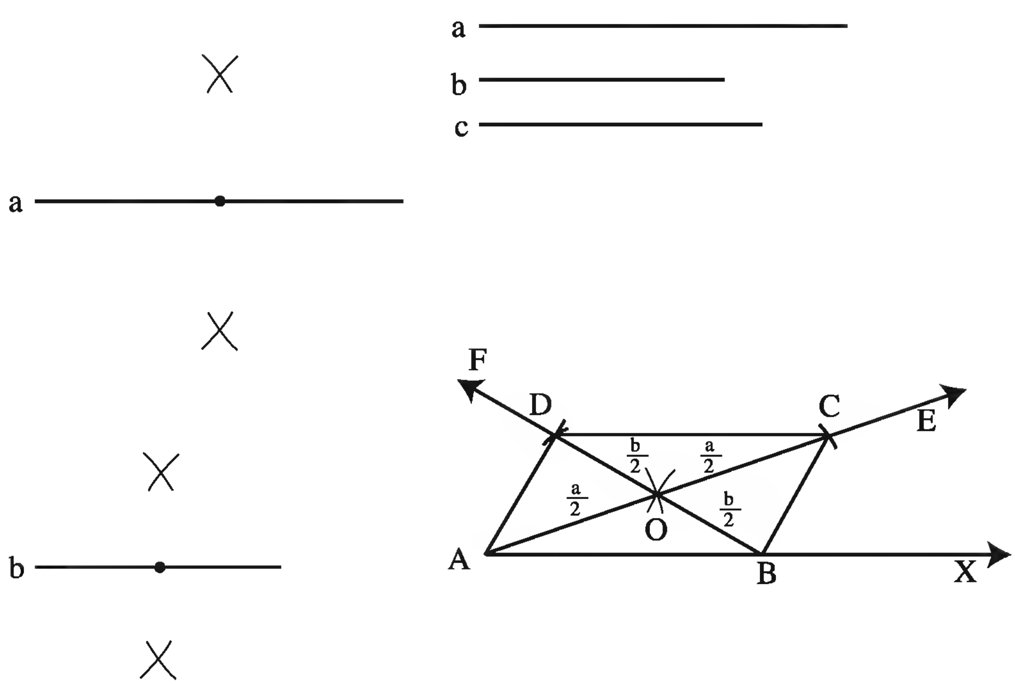
মনে করি, সামান্তরিকের কর্ণ দুইটি a ও b এবং কর্ণদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত একটি কোণ $\angle x$ দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি $\overrightarrow{AM}$ থেকে a এর সমান AC রেখাংশ নিই। $\overline{AC}$ এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করি। O বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle AOP$ আঁকি। $\overrightarrow{OP}$ এর বিপরীত রশ্মি $\overrightarrow{OQ}$ অঙ্কন করি। $\overrightarrow{OP}$ ও $\overrightarrow{OQ}$ রশ্মিদ্বয় থেকে $\frac{1}{2}b$ এর সমান যথাক্রমে OB ও OD রেখাংশদ্বয় নিই। $A, B; A, D; C, B$ ও C, D যোগ করি।
তাহলে, $ABCD$ ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ : $\Delta\, AOB$ ও $\Delta\, COD$ এ
$OA = OC = \frac{1}{2}a,\ OB = OD = \frac{1}{2}b$ [অঙ্কনানুসারে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle COD$ [বিপ্রতীপ কোণ]।
অতএব, $\Delta AOB \cong \Delta COD$
সুতরাং, $AB = CD$
এবং $\angle ABO = \angle CDO$; কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।
$\therefore$ AB ও CD সমান ও সমান্তরাল।
অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল।
সুতরাং, $ABCD$ একটি সামান্তরিক যার কর্ণদ্বয় $AC = AO + OC = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a = a$
এবং $BD = BO + OD = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b = b$ এবং কর্ণ দুইটির অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB = \angle x$
অতএব, $ABCD$ ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য –৩.৬

সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ ও একটি বাহু দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।



মনে করি, সামান্তরিকের দুইটি কর্ণ a ও b এবং একটি বাহু c দেওয়া আছে। সামান্তরিকটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : a ও b কর্ণদ্বয়কে সমান দুইভাগে বিভক্ত করি। যেকোনো রশ্মি $\overrightarrow{AX}$ থেকে c এর সমান AB নিই। A ও B কে কেন্দ্র করে যথাক্রমে $\frac{a}{2}$ ও $\frac{b}{2}$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে AB এর একই পাশে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। মনে করি, বৃত্তচাপ দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A, O ও O, B যোগ করি। AO কে AE বরাবর এবং BO কে BF বরাবর বর্ধিত করি। OE থেকে $\frac{a}{2} = OC$ এবং OF থেকে $\frac{b}{2} = OD$ নিই। A, D; D, C ও B, C যোগ করি।

তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ : ΔAOB ও ΔCOD এ

$OA = OC = \frac{a}{2}$; $OB = OD = \frac{b}{2}$, [অঙ্কনানুসারে]

এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AOB$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle COD$, [বিপ্রতীপ কোণ]

$\therefore \Delta AOB \cong \Delta COD$.

$\therefore AB = CD$ এবং $\angle ABO = \angle ODC$; কিন্তু কোণ দুইটি একান্তর কোণ।

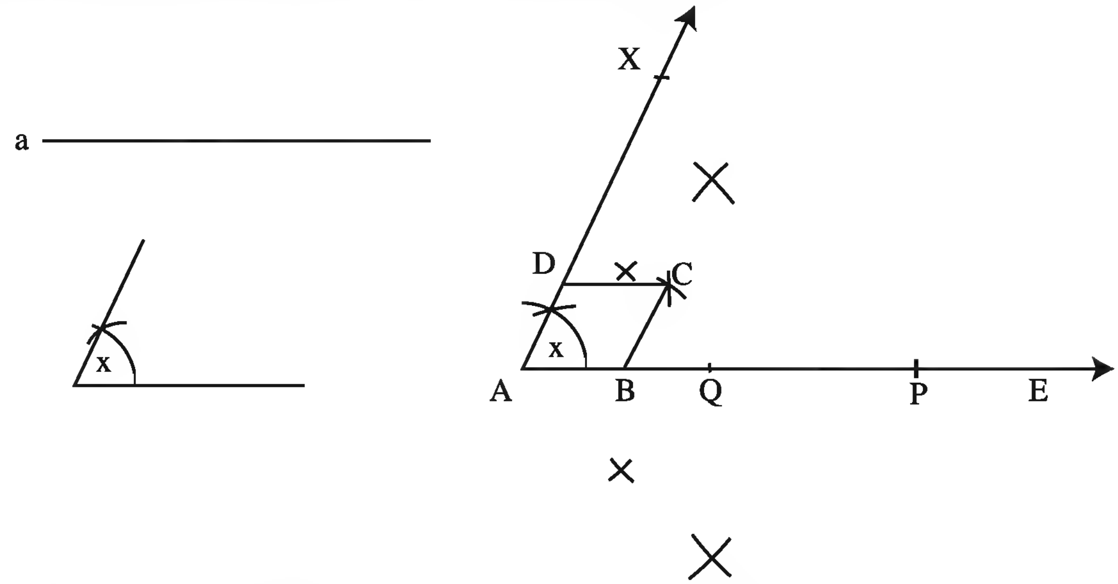
$\therefore$ AB ও CD সমান ও সমান্তরাল।

অনুরূপভাবে, AD ও BC সমান ও সমান্তরাল।

অতএব, ABCD ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য–৩.৭

রম্বসের পরিসীমা ও একটি কোণ দেওয়া আছে। রম্বসটি আঁকতে হবে।



মনে করি, একটি রম্বসের পরিসীমা a এবং একটি কোণ $\angle x$ ($\neq 90^\circ$) দেওয়া আছে। রম্বসটি অঙ্কন করতে হবে।

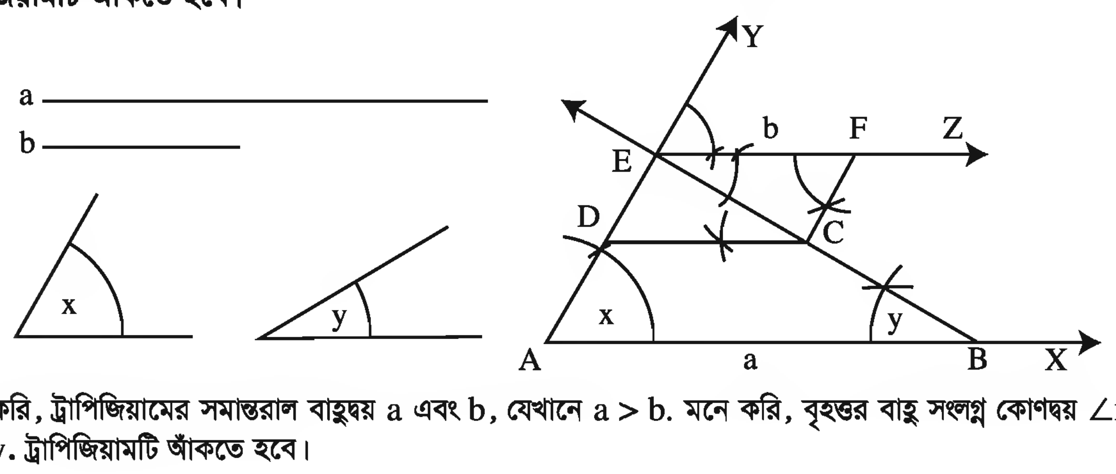
অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি AE থেকে a এর সমান AP নিই। AP কে Q বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করি যেখানে $AQ = \frac{1}{2}a$. আবার AQ কে B বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত করি যেখানে $AB = \frac{1}{4}a$. AB এর A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle BAX$ আঁকি। AX রশ্মি থেকে $\frac{1}{4}a = AD$ নিই। এখন B ও D কে কেন্দ্র করে $\frac{1}{4}a$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে $\angle BAD$ এর অভ্যন্তরে দুইটি বৃত্তচাপ আঁকি। ধরি, তারা পরস্পরকে C বিন্দুতে ছেদ করে। B, C ও D, C যোগ করি। তাহলে, ABCD ই উদ্দিষ্ট রম্বস।

প্রমাণ : ABCD এ $AB = BC = CD = DA = \frac{1}{4}a$ এবং $\angle BAD = \angle x$

$\therefore$ ABCD ই নির্ণেয় রম্বস।

সম্পাদ্য–৩.৮

ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল দুইটি বাহু এবং তাদের মধ্যে বৃহত্তর বাহু সংলগ্ন দুইটি কোণ দেওয়া আছে। ট্রাপিজিয়ামটি আঁকতে হবে।



মনে করি, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহুদ্বয় a এবং b, যেখানে $a > b$. মনে করি, বৃহত্তর বাহু সংলগ্ন কোণদ্বয় $\angle x$ ও $\angle y$. ট্রাপিজিয়ামটি আঁকতে হবে।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি $\overrightarrow{AX}$ থেকে $AB = a$ নিই। AB রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle BAY$ এবং B বিন্দুতে $\angle y$ এর সমান $\angle ABE$ আঁকি। ধরি, $\overrightarrow{AY}$ এবং $\overrightarrow{BE}$ রশ্মিদ্বয় পরস্পরকে E বিন্দুতে ছেদ করে। E বিন্দু দিয়ে $EZ||AB$ টানি। EZ থেকে b এর সমান EF নিই। F বিন্দু দিয়ে $FC||EA$ টানি। মনে করি, FC, BE কে C বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দু দিয়ে $CD||FE$ টানি। মনে করি, CD, AE কে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, ABCD ই উদ্দিস্ট ট্রাপিজিয়াম।

প্রমাণ : যেহেতু ED, EAএর উপর অবস্থিত। সেহেতু
$ED||FC$. [$\because FC||EA$, অঙ্কন অনুসারে]
এবং $CD||FE$ [অঙ্কন অনুসারে]।
$\therefore$ DEFC একটি সামান্তরিক এবং $DC = EF = b$.
এখন চতুর্ভুজ ABCD এ, $AB = a$, $CD = b$, $AB||CD$. [অঙ্কন অনুসারে]
এবং $\angle BAD = \angle x$, $\angle ABC = \angle y$. [অঙ্কন অনুসারে]
অতএব, ABCD ই নির্ণেয় ট্রাপিজিয়াম।

অনুশীলনী–৩

১। একটি ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন দুইটি কোণ এবং শীর্ষ থেকে ভূমির ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

২। বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা দেওয়া আছে। বর্গক্ষেত্রটি আঁক।

৩। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৪। ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণ, উচ্চতা ও অপর দুই বাহুর সমষ্টি দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

৫। ABCD চতুর্ভুজের AB ও BC বাহু এবং $\angle x$, $\angle y$ ও $\angle z$ কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক।

৬। একটি চতুর্ভুজের দুইটি বাহু ও তিনটি কোণ দেওয়া আছে। চতুর্ভুজটি আঁক।

৭। সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা দেওয়া আছে। ত্রিভুজটি আঁক।

ত্রিভুজ সংক্রান্ত

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্মকোণদ্বয়ের পার্থক্য 6^0 হলে, ক্ষুদ্রতম কোণের মান–

ক. 38^0 খ. 41^0
গ. 42^0 ঘ. 49^0

২। নিচের কোনটি সামান্তরিকের বৈশিষ্ট্য?

ক. কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করে
খ. বিপরীত বাহুগুলো অসমান্তরাল
গ. বিপরীত বাহুদ্বয় অসমান
ঘ. প্রত্যেক কর্ণ দুইটি সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ত্রিভুজে বিভক্ত করে না।

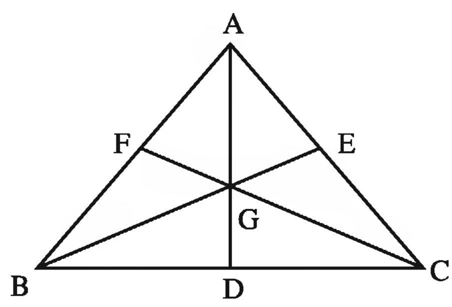
৩। PQR ত্রিভুজে PM, QR বাহুর উপর মধ্যমা হলে–

ক. Δ ক্ষেত্র PQR = Δ ক্ষেত্র PRM
খ. $\angle QPM = \angle RPM$
গ. Δ ক্ষেত্র PQM = Δ ক্ষেত্র PRM
ঘ. $\angle PMQ = \angle PMR$

৪। i. একই ভূমি ও একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান
ii. একই ভূমির ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিক ক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফল সমান
iii. ট্রাপিজিয়ামের কর্ণদ্বয় ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

ওপরের তথ্যের আলোকে কোন উত্তরটি সঠিক?

ক. ii এবং iii খ. i এবং iii
গ. i এবং ii ঘ. i, ii এবং iii



Δ ABC-এর AD, BE ও CF মধ্যমাত্রয় G বিন্দুতে ছেদ করেছে। আলোচ্য বর্ণনা মতে (৫-৭) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৫। G বিন্দুর নাম কী?

ক. লম্ববিন্দু খ. অন্তঃকেন্দ্র
গ. পরিকেন্দ্র ঘ. ভরকেন্দ্র

৬। সঠিক উত্তর কোনটি ?

ক. $AD + BE + CF > AB + BC + AC$

খ. $AD + BE + CF < AB + BC + AC$

গ. $2(AD + BE + CF) > 3(AB + BC + AC)$

ঘ. $AD + BE + CF \leq AB + BC + AC$

৭। G বিন্দু মধ্যমাত্রয়কে যে অনুপাতে বিভক্ত হবে তা হল-

ক. $2 : 1$ খ. $2 : 3$

গ. $1 : 3$ ঘ. $1 : 4$

সৃজনশীল প্রশ্ন

১. মি. জকী ও জাফারুল সাহেবের বসত বাড়ি একই সীমারেখার মধ্যে অবস্থিত এবং বাড়ির ক্ষেত্রফল সমান। তবে মি. জকীর বাড়ির আকৃতি আয়তাকার এবং জাফারুল সাহেবের বাড়ি সামান্তরিক আকৃতির।

ক. ভূমি/দৈর্ঘ্য 10 একক এবং উচ্চতা 8 একক ধরে তাদের বাড়ির সীমারেখা অঙ্কন কর।

খ. দেখাও যে, মি. জকীর বাড়ির সীমারেখা জাফারুল সাহেবের বাড়ির সীমারেখা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।

গ. মি. জকীর বাড়ির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত $4 : 3$ এবং ক্ষেত্রফল 300 বর্গ একক হলে, তাদের বাড়ির ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত নির্ণয় কর।

২. ABC ত্রিভুজের তিনটি বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে x সে.মি., $(x-2)$ সে.মি. এবং $(x+2)$ সে.মি.।

ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ত্রিভুজটি অঙ্কন কর।

খ. ত্রিভুজটির প্রকৃতি সম্পর্কে তোমার মতামত ব্যক্ত কর। $x = 8$ হলে, তোমার মতামতের যথার্থতা প্রমাণ কর।

গ. প্রমাণ কর যে, বৃহত্তম বাহুর বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে ঐ বাহুর মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখা যে দুইটি ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তাদের ক্ষেত্রফলদ্বয় এবং উচ্চতাদ্বয় পরস্পর সমানুপাতিক।

৩. মনে কর, তোমরা তিন বন্ধু একটি মাঠের মধ্যে ABC সমবাহু ত্রিভুজাকৃতি তিনটি ছায়ায় দাঁড়িয়ে আছ। কিছু সময় পর তোমরা ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে পর্যায়ক্রমে ঘুরে তিন বাহুর মধ্যবিন্দুতে এসে দাঁড়ালে।

ক. প্রথম অবস্থায় তোমাদের পারস্পরিক দূরত্ব 10 মিটার কল্পনা করে সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ চিত্রাঙ্কন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, দ্বিতীয় অবস্থানে তোমরা সমবাহু ত্রিভুজ আকৃতিতে দাঁড়িয়েছ।

গ. উপরোক্ত ঘটনার প্রেক্ষিতে দেখাও যে, সমবাহু ত্রিভুজের মধ্যমাসমূহ পরস্পর সমান।

৪. ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ। BC বাহুকে E পর্যন্ত বর্ধিত কর যেন, $BC = CE$ হয় এবং A, E যোগ কর। $AD \perp BC$.

ক. তথ্যগুলোকে জ্যামিতিক চিত্রের মাধ্যমে প্রদর্শন কর।

খ. প্রমাণ কর যে, $4BD^2 = BC^2$.

গ. দেখাও যে, $AE^2 + CD^2 = AC^2 + DE^2$.

৫. একটি ত্রিভুজাকৃতি ক্ষেত্রের পরিসীমা ‘a’ একক।

ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ পরিসীমা ‘a’ সমান তিন ভাগে বিভক্ত কর।

খ. সংক্ষিপ্ত বিবরণসহ ‘a’ পরিসীমাবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ আঁক।

গ. উপরিউক্ত পরিসীমাবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর যার দৈর্ঘ্য ও প্রস্থের অনুপাত $2 : 1$.

চতুর্থ অধ্যায়

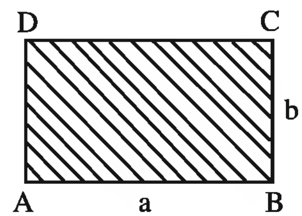
ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত কতিপয় উপপাদ্য

৪.১। সমতল ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

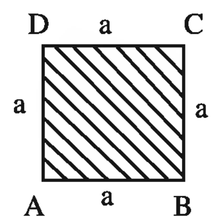
প্রত্যেক সীমাবদ্ধ সমতল ক্ষেত্রের নির্দিষ্ট ক্ষেত্রফল রয়েছে। এই ক্ষেত্রফল পরিমাপের জন্য সাধারণত এক একক বাহুবিশিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলকে বর্গ একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। যেমন, যে বর্গক্ষেত্রের একটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার, তার ক্ষেত্রফল 1 বর্গমিটার।

আমরা জানি,

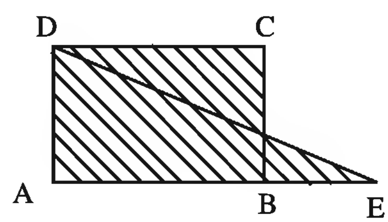
(ক) ABCD আয়তক্ষেত্রের
দৈর্ঘ্য $AB = a$ একক (যথা, মিটার)
প্রস্থ $BC = b$ একক (যথা, মিটার) হলে,
ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= ab$ বর্গ একক
(যথা, বর্গমিটার)।



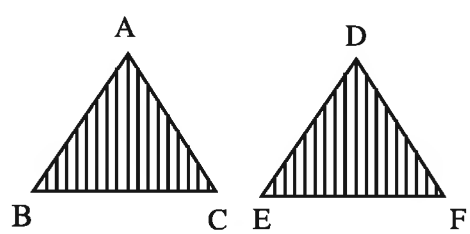
(খ) ABCD বর্গক্ষেত্রের বাহুর
দৈর্ঘ্য $= a$ একক (যথা, মিটার) হলে,
ABCD বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গ একক
(যথা, বর্গমিটার)।



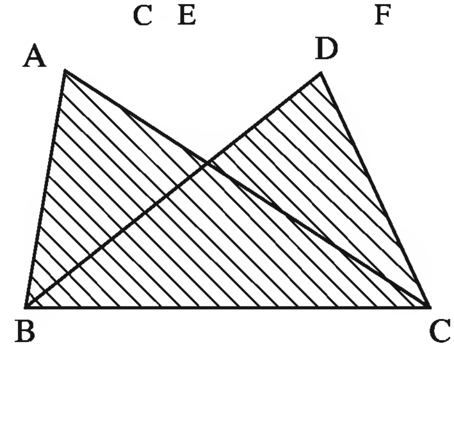
দুইটি ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলে তাদের মধ্যে '=' চিহ্ন ব্যবহার করা হয়। যেমন, ABCD আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AED ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।



উল্লেখ্য যে, ΔABC ও ΔDEF সর্বসম হলে, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ লেখা হয়। এক্ষেত্রে অবশ্যই ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \Delta DEF$ এর ক্ষেত্রফল।



কিন্তু দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান হলেই ত্রিভুজ দুইটি সর্বসম হয় না। যেমন, চিত্রে ΔABC এর ক্ষেত্রফল $= \Delta DBC$ এর ক্ষেত্রফল। কিন্তু ΔABC ও ΔDBC সর্বসম নয়।

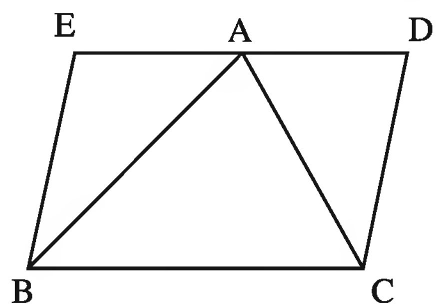


৪.২। ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত কতিপয় উপপাদ্য

সামান্তরিকক্ষেত্রের এবং ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সংক্রান্ত পাঁচটি উপপাদ্যের বর্ণনা ও চিত্রসহ ব্যাখ্যা দেওয়া হল। দ্বিতীয় অধ্যায়ে উল্লিখিত উপপাদ্যগুলোর সাহায্যে এগুলো প্রমাণ করা যায়। তবে এ পর্যায়ে বিনা প্রমাণে উপপাদ্যগুলো স্বীকার করে নেওয়া হবে।

উপপাদ্য–২০

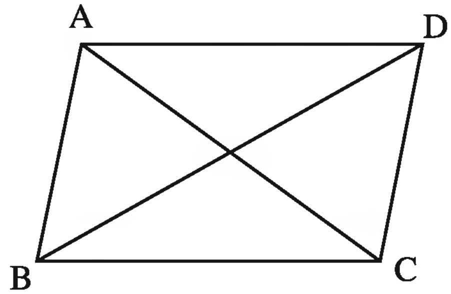
একটি ত্রিভুজক্ষেত্র ও একটি সামান্তরিকক্ষেত্র একই ভূমির ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত হলে, ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল সামান্তরিক ক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের অর্ধেক হবে।



চিত্রে, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও সামান্তরিকক্ষেত্র EBCD একই ভূমি BC এর ওপর এবং BC ও ED সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত।
সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র EBCD এর ক্ষেত্রফল)।

উপপাদ্য–২১

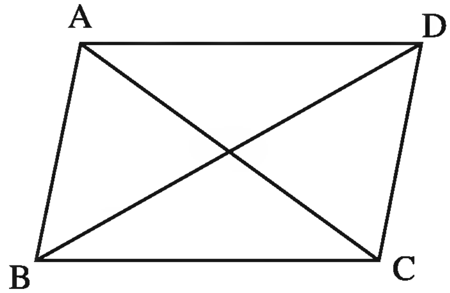
একই ভূমির ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সকল ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল সমান।



চিত্রে, ABC ও DBC ত্রিভুজক্ষেত্রদ্বয় একই ভূমি BC এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল BC ও AD এর মধ্যে অবস্থিত।
সুতরাং, ত্রিভুজক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = ত্রিভুজক্ষেত্র DBC এর ক্ষেত্রফল।

উপপাদ্য–২২

একই ভূমির ওপর এবং একই পাশে অবস্থিত সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট সকল ত্রিভুজক্ষেত্র একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত হবে।

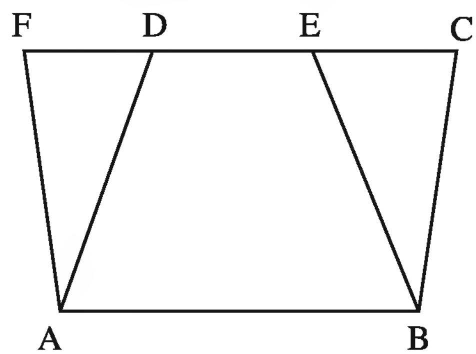


চিত্রে, একই ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্র ABC ও DBC একই ভূমি BC এর ওপর এবং তার একই পাশে অবস্থিত।

সুতরাং, AD || BC.

উপপাদ্য–২২ (ক)

একই ভূমির ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফল সমান।

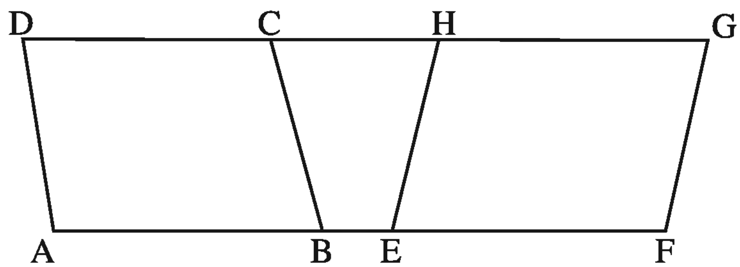


চিত্রে , ABCD ও ABEF সামান্তরিকক্ষেত্র দুইটি একই ভূমি AB এর ওপর এবং AB ও FC একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং, সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল = সামান্তরিকক্ষেত্র ABEF এর ক্ষেত্রফল।

উপপাদ্য–২২ (খ)

সমান সমান ভূমির ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগলের মধ্যে অবস্থিত সামান্তরিকক্ষেত্রসমূহের ক্ষেত্রফল সমান।



চিত্রে, ABCD ও EFGH সামান্তরিকক্ষেত্র দুইটি যথাক্রমে সমান সমান ভূমি AB ও EF এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাযুগল AF ও DG এর মধ্যে অবস্থিত।

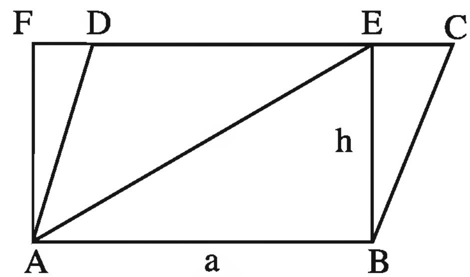
সুতরাং, সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল = সামান্তরিকক্ষেত্র EFGH এর ক্ষেত্রফল।

৪.৩। সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

সমান্তরাল রেখার মধ্যবর্তী দূরত্ব : দুইটি রেখা সমান্তরাল হলে, তাদের যেকোনো একটি রেখার কোনো বিন্দু থেকে অপর রেখা পর্যন্ত লম্ব রেখাংশের দৈর্ঘ্য একটি ধ্রুবক। এই দূরত্বই সমান্তরাল রেখা দুইটির মধ্যবর্তী দূরত্ব।

সামান্তরিকক্ষেত্রের ভূমি ও উচ্চতা : সামান্তরিকক্ষেত্রের যেকোনো বাহুকে তার ভূমি ধরা যেতে পারে। ভূমিরেখা ও ভূমির বিপরীত বাহু-রেখার মধ্যবর্তী দূরত্বই তখন ক্ষেত্রটির উচ্চতা। অর্থাৎ, ভূমিরেখার বিপরীত বাহু-রেখার কোনো বিন্দু থেকে ভূমিরেখা পর্যন্ত লম্ব রেখাংশের দৈর্ঘ্যই ক্ষেত্রটির উচ্চতা।

চিত্রে, ABCD সামান্তরিকক্ষেত্রের ভূমি AB এর দুই প্রান্তবিন্দু থেকে বিপরীত বাহু-রেখা CD কে F পর্যন্ত বর্ধিত করে AF ও BE লম্ব রেখাংশ আঁকা হয়েছে। তাহলে, ABCD সামান্তরিকক্ষেত্র ও ABEF আয়তক্ষেত্র একই ভূমি AB এর উপর এবং একই সমান্তরালযুগল AB ও CF এর মধ্যে অবস্থিত। সুতরাং, তাদের ক্ষেত্রফল সমান। কিন্তু ABEF আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ah বর্গ একক, যেখানে AB = a একক ও BE = h একক।



অতএব, ABCD সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ah বর্গ একক। এখানে ক্ষেত্রটির ভূমির দৈর্ঘ্য = a একক এবং ক্ষেত্রটির উচ্চতা = h একক।

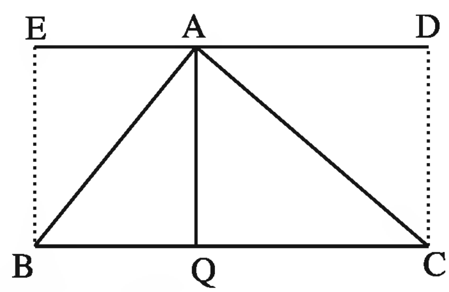
অর্থাৎ, সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = (ভূমি × উচ্চতা) বর্গ একক।

৪.৪। ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

ত্রিভুজক্ষেত্রের ভূমি ও উচ্চতা :

ত্রিভুজক্ষেত্রের যেকোনো বাহুকে ভূমি ধরা যেতে পারে। ভূমির বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে ভূমিরেখা পর্যন্ত লম্বরেখাংশের দৈর্ঘ্যই ক্ষেত্রটির উচ্চতা।

পাশের চিত্রে, ABC ত্রিভুজক্ষেত্রের ভূমি BC এবং উচ্চতা AQ। ভূমির বিপরীত শীর্ষবিন্দু A দিয়ে ভূমিরেখার সমান্তরাল রেখাংশ আঁকা হয়েছে এবং ভূমির দুই প্রান্তবিন্দু থেকে এই সমান্তরাল রেখাংশ পর্যন্ত BE ও CD লম্বরেখাংশ আঁকা হয়েছে। তাহলে, Δ ক্ষেত্র ABC এবং আয়তক্ষেত্র BCDE একই ভূমি BC এর ওপর এবং একই সমান্তরালযুগল BC ও ED এর মধ্যে অবস্থিত।



সুতরাং, Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (আয়তক্ষেত্র BCDE এর ক্ষেত্রফল)

= $\frac{1}{2}$ bh বর্গ একক

যেখানে, BC = b একক এবং CD = h একক।

এখানে ত্রিভুজক্ষেত্রটির ভূমি BC এর দৈর্ঘ্য b একক এবং উচ্চতা AQ = DC = h একক।

অতএব, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$(ভূমি × উচ্চতা) বর্গ একক।

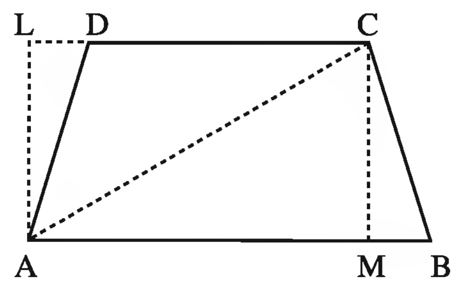
অনুশীলনী–৪

১। প্রমাণ কর যে, সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় সামান্তরিকক্ষেত্রটিকে চারটি সমান ত্রিভুজক্ষেত্রে বিভক্ত করে।

২। একটি সামান্তরিকক্ষেত্র এবং সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি আয়তক্ষেত্র একই ভূমির ওপর এবং এর একই পাশে অবস্থিত। দেখাও যে, সামান্তরিকক্ষেত্রটির পরিসীমা আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা অপেক্ষা বৃহত্তর।

৩। Δ ABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দু যথাক্রমে X ও Y.
প্রমাণ কর যে, Δ ক্ষেত্র AXY এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{4}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)।

৪। চিত্রে, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম। এর AB ও CD বাহু দুইটি সমান্তরাল। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



ইঙ্গিত : A ও C থেকে CD ও AB এর ওপর AL ও CM লম্ব টান। A, C যোগ কর। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল = (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল) + (Δ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল)।

৫। সামান্তরিক ABCD এর অভ্যন্তরে P যেকোনো একটি বিন্দু। প্রমাণ কর যে,
Δ ক্ষেত্র PAB এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র PCD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$ (সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল)।

পঞ্চম অধ্যায়

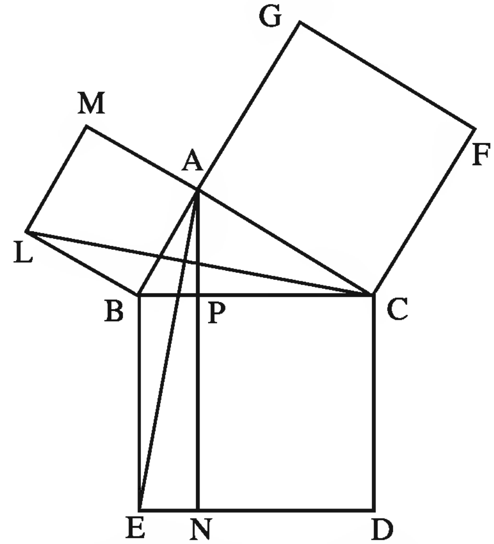
পীথাগোরাসের উপপাদ্য ও তার ব্যবহার

৫.১। পীথাগোরাসের উপপাদ্য

নিম্নোক্ত উপপাদ্যটি পীথাগোরাসের উপপাদ্য হিসেবে সুপরিচিত। খ্রিস্টের জন্মের প্রায় ৬০০ বছর আগে গ্রীক পণ্ডিত পীথাগোরাস এই উপপাদ্যটি বর্ণনা করেন। কিন্তু পীথাগোরাসের প্রায় ১০০০ বছর আগেও মিশরীয় ভূমি জরিপকারীদের এই উপপাদ্যটি সম্বন্ধে ধারণা ছিল।
এই উপপাদ্যটি বিভিন্ন ভাবে প্রমাণ করা হয়েছে। এখানে দুইটি প্রমাণ দেওয়া হল। প্রথমটি ইউক্লিড প্রদত্ত।

উপপাদ্য–২৩

একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুই বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান।



মনে করি, ABC একটি সমকোণী ত্রিভুজ, যার $\angle A =$ এক সমকোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, অতিভুজ BC এর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = AB বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AC বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।
অর্থাৎ, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

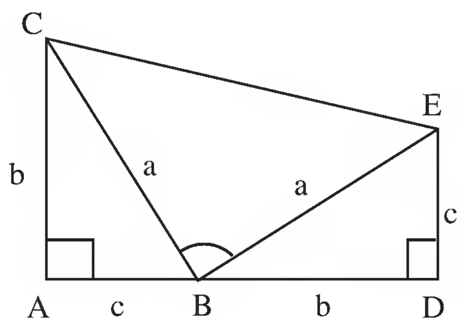
অঙ্কন : ABC ত্রিভুজের বহির্ভাগে BCDE, A C F G এবং A B L M বর্গক্ষেত্র তিনটি অঙ্কন করি। A বিন্দু দিয়ে BE রেখাংশের সমান্তরাল AN রেখাংশ অঙ্কন করি যা BC রেখাংশকে P বিন্দুতে এবং ED রেখাংশকে N বিন্দুতে ছেদ করে। A ও E এবং C ও L যোগ করি।

প্রমাণ : $\angle BAC =$ এক সমকোণ (দেওয়া আছে) এবং $\angle BAM =$ এক সমকোণ [$\because$ ABLM একটি বর্গক্ষেত্র]
$\angle BAC + \angle BAM =$ ২ সমকোণ।
$\therefore$ CA এবং AM একই সরলরেখায় অবস্থিত।
আবার, $\angle CBE = \angle ABL =$ এক সমকোণ। [অঙ্কন অনুসারে]
$\therefore \angle CBE + \angle ABC = \angle ABL + \angle ABC$, [উভয়পক্ষে $\angle ABC$ যোগ করে]
$\therefore \angle ABE = \angle CBL$.
এখন, Δ ABE ও Δ CBL এ
AB = BL, BE = BC এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ABE =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle CBL$
$\therefore$ Δ ABE এর ক্ষেত্রফল = ΔCBL এর ক্ষেত্রফল
$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABE এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র CBL এর ক্ষেত্রফল।
এখন, Δ ABE এবং আয়তক্ষেত্র BPNE একই ভূমি BE এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাংশ যুগল BE ও AN এর মধ্যে অবস্থিত।
$\therefore$ আয়তক্ষেত্র BPNE এর ক্ষেত্রফল = 2 (Δ ক্ষেত্র ABE এর ক্ষেত্রফল)
আবার, ΔCBL এবং ABLM বর্গক্ষেত্র একই ভূমি BL এর ওপর এবং একই সমান্তরাল রেখাংশ যুগল BL এবং CM এর মধ্যে অবস্থিত।
$\therefore$ বর্গক্ষেত্র ABLM এর ক্ষেত্রফল = 2 (Δ ক্ষেত্র CBL এর ক্ষেত্রফল)

$\therefore$ আয়তক্ষেত্র BPNE এর ক্ষেত্রফল = বর্গক্ষেত্র ABLM এর ক্ষেত্রফল।
একইভাবে, A, D এবং B, F যোগ করে প্রমাণ করা যায় যে,
আয়তক্ষেত্র CDNP এর ক্ষেত্রফল = বর্গক্ষেত্র ACFG এর ক্ষেত্রফল।
$\therefore$ আয়তক্ষেত্র BPNE এর ক্ষেত্রফল + আয়তক্ষেত্র CDNP এর ক্ষেত্রফল = বর্গক্ষেত্র ABLM এর ক্ষেত্রফল + বর্গক্ষেত্র ACFG এর ক্ষেত্রফল।
অর্থাৎ, বর্গক্ষেত্র BCDE এর ক্ষেত্রফল = বর্গক্ষেত্র ABLM এর ক্ষেত্রফল + বর্গক্ষেত্র ACFG এর ক্ষেত্রফল।
$\therefore$ BC এর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
= AB এর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল + AC এর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল।
অর্থাৎ, $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

বিকল্প প্রমাণ : মনে করি, ABC সমকোণী ত্রিভুজের $\angle A$ = এক সমকোণ, $BC = a$, $AB = c$ ও $AC = b$.
প্রমাণ করতে হবে যে, $BC^2 = AC^2 + AB^2$.
অর্থাৎ, $a^2 = b^2 + c^2$.

অঙ্কন : AB বাহুকে D পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $BD = AC = b$ হয়। D বিন্দুতে AD রেখাংশের ওপর লম্বভাবে DE রেখাংশ আঁকি যেন $DE = AB = c$ হয়। C, E ও B, E যোগ করি।



প্রমাণ : এখন, ΔABC ও ΔDEB এ
$AB = DE = c$, $AC = DB = b$. [অঙ্কন অনুসারে]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle BAC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle EDB$. [প্রত্যেকে এক সমকোণ]
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEB$
$\therefore BC = EB = a$ এবং $\angle BCA = \angle EBD$
এখন যেহেতু $CA \perp AD$ এবং $ED \perp AD$, সুতরাং $CA \,||\, ED$.
অতএব, CADE একটি ট্রাপিজিয়াম।
আবার, $\angle ABC + \angle BCA$ = এক সমকোণ।
$\therefore \angle ABC + \angle EBD$ = এক সমকোণ।
কিন্তু, $\angle ABC + \angle CBE + \angle EBD$ = দুই সমকোণ
$\therefore \angle CBE$ = এক সমকোণ।
এখন, CADE ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র CAB এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র CBE এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র EBD এর ক্ষেত্রফল।

$\therefore \quad \frac{1}{2} AD\,(AC + DE) = \frac{1}{2}\,bc + \frac{1}{2}\,a^2 + \frac{1}{2}\,bc$

বা, $\frac{1}{2}(c + b)(b + c) = bc + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}(b + c)^2 = bc + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}(b^2 + 2bc + c^2) = bc + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}\,b^2 + bc + \frac{1}{2}c^2 = bc + \frac{1}{2}a^2$

বা, $\frac{1}{2}\,b^2 + \frac{1}{2}\,c^2 = \frac{1}{2}a^2$

$\therefore \quad b^2 + c^2 = a^2$

মন্তব্য : ওপরে প্রদত্ত বিকল্প প্রমাণে ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
$= \frac{1}{2}$(সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দূরত্ব) $\times$ (সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্যের সমষ্টি)
এই সূত্র ব্যবহার করা হয়েছে।

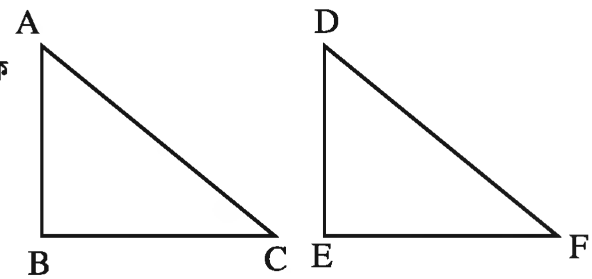
অনুসিদ্ধান্ত : ΔABC এ, $\angle A$ = এক সমকোণ এবং AD, BC বাহুর ওপর D বিন্দুতে লম্ব হলে,
$AB^2 = BC.\,BD$ এবং $AC^2 = BC\,.\,DC$.

পীথাগোরাসের উপপাদ্যের বিপরীত প্রতিজ্ঞা

উপপাদ্য–২৪

যদি কোনো ত্রিভুজের একটি বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর দুইটি বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান হয়, তবে শেষোক্ত বাহুদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণটি সমকোণ হবে।

মনে করি, Δ ABC এ, $AC^2 = AB^2 + BC^2$
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle B$ = এক সমকোণ।



অঙ্কন : DEF একটি ত্রিভুজ আঁকি, যার $\angle E$ = এক সমকোণ, DE = AB এবং EF = BC.

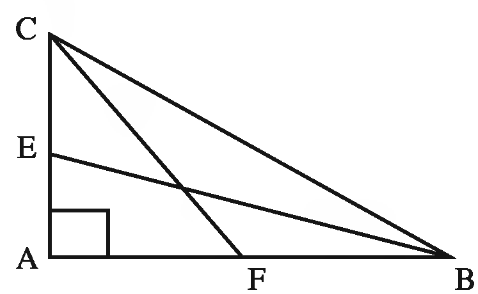
প্রমাণ : ΔDEF এর $\angle E$ = এক সমকোণ,
সুতরাং পীথাগোরাসের উপপাদ্যের সাহায্যে পাই,

$DF^2 = DE^2 + EF^2$
$= AB^2 + BC^2$. [অঙ্কন অনুসারে]
$= AC^2$. [দেওয়া আছে]
$\therefore$ DF = AC

এখন, Δ ABC এবং Δ DEF এ, AB = DE; BC = EF. [অঙ্কন অনুসারে]
এবং AC = DF,
$\therefore \Delta ABC \cong \Delta DEF \quad \therefore \angle B = \angle E$
কিন্তু $\angle E$ = এক সমকোণ।
$\therefore \angle B$ = এক সমকোণ।

উদাহরণ ও ব্যবহারিক প্রয়োগ

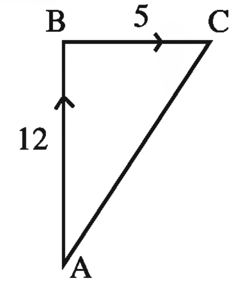
উদাহরণ ১ : ABC সমকোণী ত্রিভুজে $\angle A$ = এক সমকোণ। BE ও CF মধ্যমা।
প্রমাণ কর যে, $4(BE^2 + CF^2) = 5BC^2$.



প্রমাণ : $BE^2 = AB^2 + AE^2$
এবং $CF^2 = AC^2 + AF^2$

$$\begin{aligned}\therefore 4(BE^2 + CF^2) &= 4(AB^2 + AE^2 + AC^2 + AF^2)\\ &= 4(AB^2 + AC^2) + 4AE^2 + 4AF^2\\ &= 4BC^2 + (2AE)^2 + (2AF)^2\\ &= 4BC^2 + AC^2 + AB^2\\ &= 4BC^2 + BC^2 = 5BC^2.\end{aligned}$$

উদাহরণ ২ : একজন লোক একটি নির্দিষ্ট স্থান A থেকে যাত্রা শুরু করে। 12 কিলোমিটার ঠিক উত্তর দিকে গেল এবং সেখান থেকে 5 কিলোমিটার ঠিক পূর্ব দিকে গেল। যাত্রা শেষে সে A থেকে কত দূরে থাকবে?



সমাধান : মনে করি, লোকটি A থেকে উত্তরে 12 কি. মি. গমন করে B বিন্দুতে পৌছাল এবং B থেকে পূর্বে 5 কি. মি. গমন করে C বিন্দুতে পৌছাল।
তাহলে, AB = 12 এবং BC = 5; AC এর দূরত্ব নির্ণয় করতে হবে।
এখন, ABC সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,
$AC^2 = AB^2 + BC^2 = 12^2 + 5^2 = 144 + 25 = 169$
$\therefore AC = 13$
অতএব, যাত্রা শেষে লোকটি A থেকে 13 কিলোমিটার দূরে থাকবে।

অনুশীলনী–৫

১। একটি মই এর এক প্রান্ত ভূমি থেকে 15 মিটার উঁচু একটি দালানের ছাদ বরাবর পৌঁছায় এবং অপর প্রান্ত ঘর থেকে 8 মিটার দূরে থাকে। মইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২। দুইটি খুঁটি 25·3 মিটার ও 32·5 মিটার উঁচু এবং পরস্পর থেকে 24 মিটার দূরে অবস্থিত। খুঁটিদ্বয়ের শীর্ষ দুইটির দূরত্ব নির্ণয় কর।

৩। একজন লোক একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে যাত্রা শুরু করে 27 কি. মি. ঠিক উত্তর দিকে যায়, সেখান থেকে 24 কি. মি. ঠিক পূর্ব দিকে যায় এবং সবশেষে 20 কি. মি. ঠিক দক্ষিণ দিকে যায়। যাত্রাশেষে লোকটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে কত দূরে থাকবে?

৪। কোনো সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি ও একটি বাহু যথাক্রমে 4·2 সে. মি. ও 7·5 সে. মি. হলে, এর উচ্চতা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫। কোনো সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহু a সে. মি. হলে, এর উচ্চতা ও ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৬। ABC ত্রিভুজের $\angle A =$ এক সমকোণ। D, AC এর উপরস্থ একটি বিন্দু।

প্রমাণ কর যে, $BC^2 + AD^2 = BD^2 + AC^2$.

৭। ABC একটি সমবাহু ত্রিভুজ এবং AD, BC এর ওপর লম্ব।

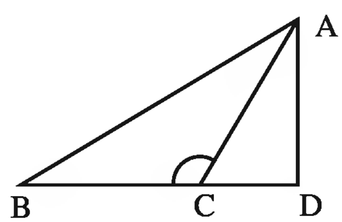
দেখাও যে, $4AD^2 = 3AB^2$.

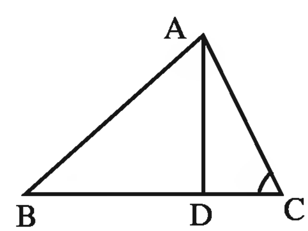
৮। ABC একটি সমদ্বিবাহু সমকোণী ত্রিভুজ। BC এর অতিভুজ এবং P, BC এর ওপর যেকোনো বিন্দু।

প্রমাণ কর যে, $PB^2 + PC^2 = 2PA^2$.

৯। ΔABC এর $\angle C$ স্থূলকোণ; AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে,

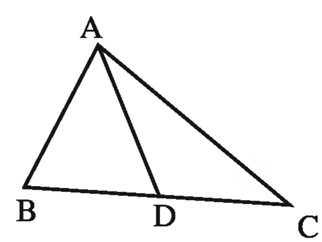
$AB^2 = AC^2 + BC^2 + 2BC.CD$.





১০। Δ ABC এর $\angle C$ সূক্ষ্মকোণ; AD, BC এর ওপর লম্ব। দেখাও যে,

$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2BC.CD$.



১১। Δ ABC এর AD একটি মধ্যমা। দেখাও যে,
$AB^2 + AC^2 = 2(BD^2 + AD^2)$.

১২। ABCD আয়তক্ষেত্রের অভ্যন্তরে O যেকোনো বিন্দু। প্রমাণ কর যে, $OA^2 + OC^2 = OB^2 + OD^2$.

ষষ্ঠ অধ্যায়

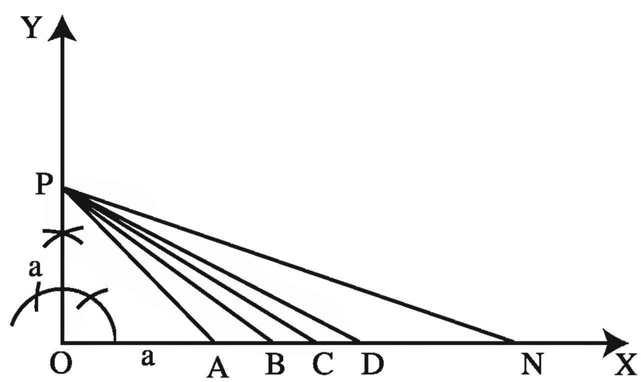
পীথাগোরাসের প্রতিজ্ঞা প্রয়োগ সম্পর্কিত কতিপয় সম্পাদ্য

সম্পাদ্য–৬.১

এমন একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন করতে হবে যেন বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল কোনো নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের নির্দিষ্ট গুণিতক হয়।

মনে করি, একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য $OA = a$ একক। সুতরাং এর ক্ষেত্রফল $= a^2$ বর্গ একক। এখন, এমন একটি বর্গক্ষেত্র নির্ণয় করতে হবে যার ক্ষেত্রফল a^2 এর একটি নির্দিষ্ট গুণিতক।
মনে করি, নির্ণেয় বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= Ka^2$, যেখানে K একটি ধনাত্মক পূর্ণসংখ্যা।

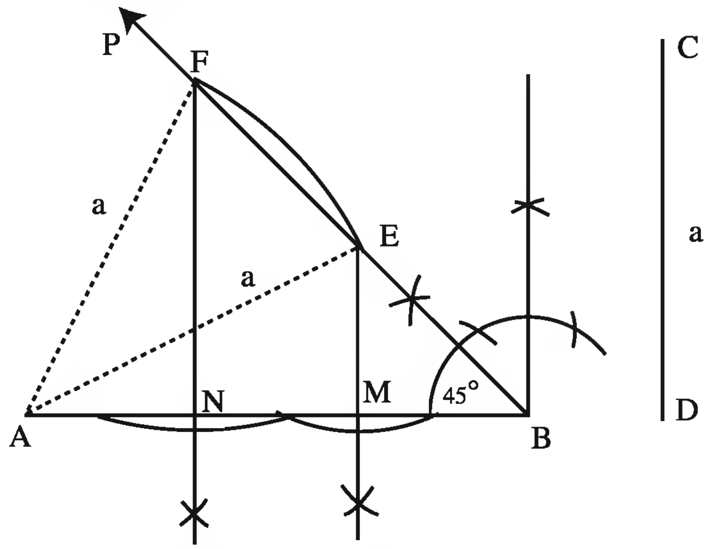
অঙ্কন : O বিন্দুতে পরস্পর লম্ব দুইটি রশ্মি $\overrightarrow{OX}$ ও $\overrightarrow{OY}$ নিই। এখন, OX ও OY থেকে a এককের সমান করে যথাক্রমে OA ও OP কেটে নিই। P ও A যোগ করি।



সুতরাং , $PA^2 = OA^2 + OP^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$
অর্থাৎ, PA এর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ এবং $PA = \sqrt{2}a$.
আবার, OX থেকে PA এর সমান করে OB কেটে নিই এবং P ও B যোগ করি।
তাহলে, $PB^2 = OB^2 + OP^2 = 2a^2 + a^2 = 3a^2$
অর্থাৎ, PB এর ওপর বর্গক্ষেত্র প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের তিনগুণ এবং $PB = \sqrt{3a^2}. = \sqrt{3}a.$
এরূপ, $(K-1)$ সংখ্যক বার করে OX থেকে ON কেটে নিই এবং P ও N যোগ করি।
তাহলে, $PN^2 = Ka^2$ হবে;
অর্থাৎ, $(K-1)$ তম ধাপে প্রাপ্ত PN এর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রদত্ত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের K গুণ এবং $PN = \sqrt{K}a.$

সম্পাদ্য–৬.২

কোনো নির্দিষ্ট রেখাংশকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করতে হবে যেন অংশ দুইটির ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।



মনে করি, AB একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ এবং $CD = a$ কোনো বর্গক্ষেত্রের একটি বাহু। AB রেখাংশের ওপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করতে হবে যেন অংশ দুইটির ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের সমষ্টি CD এর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

অঙ্কন : B বিন্দুতে 45° এর সমান একটি $\angle ABP$ আঁকি। A বিন্দুকে কেন্দ্র করে $CD = a$ ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্তচাপ আঁকি; মনে করি তা BP রেখাকে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে। E ও F বিন্দু থেকে AB এর ওপর যথাক্রমে EM ও FN লম্ব আঁকি। তাহলে, AB রেখাংশের ওপর M বা N দুইটি বিন্দু যা রেখাংশকে দুইটি অংশে বিভক্ত করে।

প্রমাণ : $\angle ABP = 45°$ এবং $\angle EMB = 90°$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore \angle BEM = 45°$

আবার, $EM = BM$. [$\because \angle EBM = \angle BEM$]

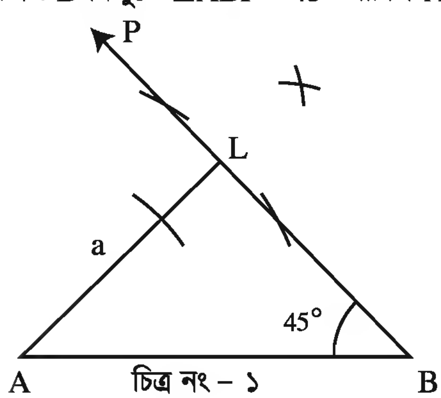
সুতরাং $AM^2 + MB^2 = AM^2 + EM^2 = AE^2 = CD^2 = a^2$

একইভাবে, $AN^2 + NB^2 = AN^2 + FN^2 = AF^2 = CD^2 = a^2$

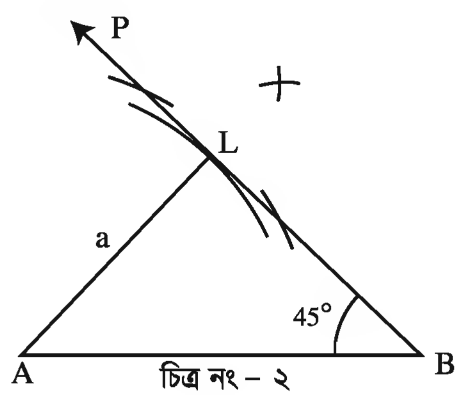
সুতরাং, M বা N ই নির্ণেয় বিন্দু।

দ্রষ্টব্য : A বিন্দুকে কেন্দ্র করে যেকোনো দৈর্ঘ্য $CD = a$ ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্তচাপ আঁকলে তা BP কে দুইটি বিন্দুতে ছেদ নাও করতে পারে।

অঙ্কন : B বিন্দুতে $\angle ABP = 45°$ আঁকি। A বিন্দু থেকে BP এর উপর AL লম্ব আঁকি।



চিত্র নং – ১

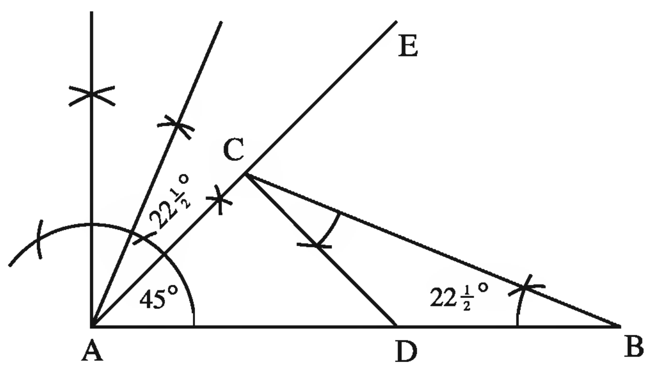


চিত্র নং – ২

(১) CD (= a) যদি AL থেকে ছোট হয় তবে A বিন্দুকে কেন্দ্র করে CD ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপ BP কে ছেদ করবে না (চিত্র–১) এবং সেক্ষেত্রে AB রেখাংশের ওপর নির্ণেয় বিন্দু পাওয়া যাবে না।
(২) CD (= a) যদি AL এর সমান হয় তবে A বিন্দুকে কেন্দ্র করে CD ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তচাপ BP এর সাথে কেবল L বিন্দুতে মিলিত হবে (চিত্র–২) এবং সেক্ষেত্রে AB রেখাংশের ওপর মাত্র একটি বিন্দু পাওয়া যাবে।

সম্পাদ্য–৬.৩

কোনো নির্দিষ্ট রেখাংশকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করতে হবে যেন এক অংশের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর অংশের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হয়।



মনে করি, AB একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। AB এর ওপর এমন একটি বিন্দু নির্ণয় করতে হবে যেন এক অংশের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অপর অংশের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ হয়।

অঙ্কন : AB এর A বিন্দুতে $\angle BAE = 45°$ এবং B বিন্দুতে $\angle ABC = 22\frac{1}{2}°$ আঁকি।
মনে করি, BC, AE কে C বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দুতে $\angle BCD = \angle B$ আঁকি।
মনে করি, CD, AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, AD ও BD ই নির্ণেয় অংশদ্বয়।

প্রমাণ : যেহেতু, $\angle BCD = \angle CBD$,
$\therefore CD = BD.$
আবার, $\angle CDA = \angle BCD + \angle CBD = 45°$
$\therefore AC = CD.$ $[\angle CAD = \angle CDA = 45°]$
সুতরাং, $AC = CD = BD.$
আবার, ΔACD এ $\angle ACD = 90°$ এবং AD তার অতিভুজ।

$$\begin{aligned}\therefore AD^2 &= AC^2 + CD^2\\ &= BD^2 + BD^2\\ &= 2BD^2\end{aligned}$$

অর্থাৎ, AB এর AD অংশের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, এর BD অংশের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের দ্বিগুণ।
অতএব, AD এবং BD ই হল AB এর বিভক্ত অংশ।

দ্রষ্টব্য : এক সমকোণ অঙ্কন করে তাকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে 45° পরিমাপের কোণ পাওয়া যায়। এভাবে প্রাপ্ত 45° কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে $22\frac{1}{2}°$ পরিমাপের কোণ পাওয়া যায়।

অনুশীলনী–৬

১। দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমষ্টির সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর।

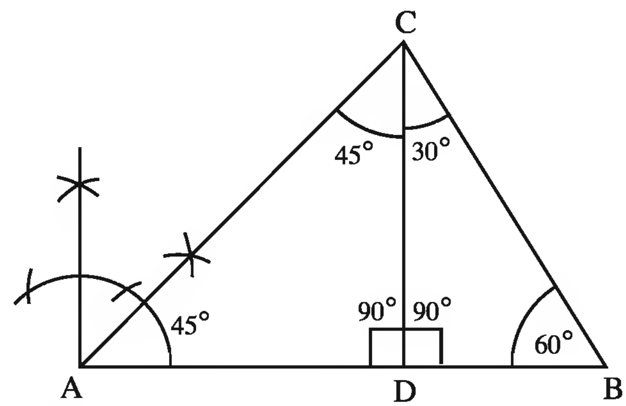
২। দুইটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের অন্তরের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট একটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কন কর।

৩। এমন একটি আয়তক্ষেত্র অঙ্কন কর, যার কর্ণের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের পাঁচগুণ হবে।

৪। একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে এমন দুইভাগে ভাগ করতে হবে যেন দুই অংশের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল দুইটির অন্তর একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

৫। একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে এরূপ দুইটি অংশে ভাগ কর যেন এক অংশের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল অন্য অংশের ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের তিনগুণ হয়।

[**ইঙ্গিত :** AB নির্দিষ্ট রেখাংশ।
Δ ABC অঙ্কন কর যেখানে
$\angle A = 45^\circ$ ও $\angle B = 60^\circ$
$\angle ACD = \angle A$ আঁক।
তাহলে, AD = CD
Δ BCD এ, BC = 2BD.]



অতএব, $AD^2 = CD^2 = (BC^2 - BD^2) = 3BD^2$

সপ্তম অধ্যায়

জ্যামিতিক অনুপাত ও সদৃশতা

৭.১। অনুপাত ও সমানুপাত

একই এককে পরিমাপযোগ্য দুইটি রাশির পরিমাপগত তুলনা করার জন্য তাদের অনুপাত (Ratio) বিবেচনা করা হয়। এ সম্পর্কে বীজগণিত অংশে বিস্তারিত আলোচনা করা হয়েছে। উল্লেখ্য যে, A ও B এরূপ দুইটি রাশি হলে তাদের অনুপাতকে A ঃ B বা $\frac{A}{B}$ লিখে প্রকাশ করা হয়। একই u এককে A ও B এর পরিমাপ যথাক্রমে au ও bu হলে, A ঃ B = au ঃ bu = a ঃ b = $\frac{a}{b}$

যেমন, একটি টেবিলের দৈর্ঘ্য $2{\cdot}25$ মি. ও প্রস্থ $0{\cdot}9$ মি. হলে,

টেবিলের দৈর্ঘ্য ঃ টেবিলের প্রস্থ = $\frac{2{\cdot}25}{0{\cdot}9} = \frac{5}{2}$

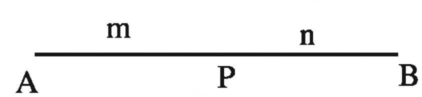
যা থেকে বলা যায় যে, টেবিলের দৈর্ঘ্য তার প্রস্থের $\frac{5}{2}$ বা $2\frac{1}{2}$ গুণ।

দুইটি অনুপাতের সমতা সম্পর্ককে সমানুপাত (Proportion) বলা হয়। A ঃ B = C ঃ D সমানুপাতের A, B, C, D রাশিগুলোকে সমানুপাতিক (Proportional) বলা হয়।

রেখাংশের অন্তর্বিভক্তি ও বহির্বিভক্তি

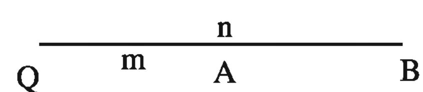
A ও B সমতলস্থ দুইটি ভিন্ন বিন্দু হলে এবং m ও n যেকোনো স্বাভাবিক সংখ্যা হলে আমরা স্বীকার করে নিই যে,

(১) AB রেখায় এমন অনন্য বিন্দু P আছে যেখানে P বিন্দু A ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী এবং AP ঃ PB = m ঃ n;

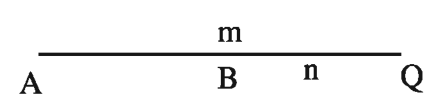


চিত্র –১

(২) AB রেখায় এমন অনন্য Q আছে যেখানে A বিন্দু Q ও B বিন্দুর অন্তর্বর্তী অথবা B বিন্দু Q ও A বিন্দুর অন্তর্বর্তী এবং AQ ঃ QB = m ঃ n।



চিত্র –২

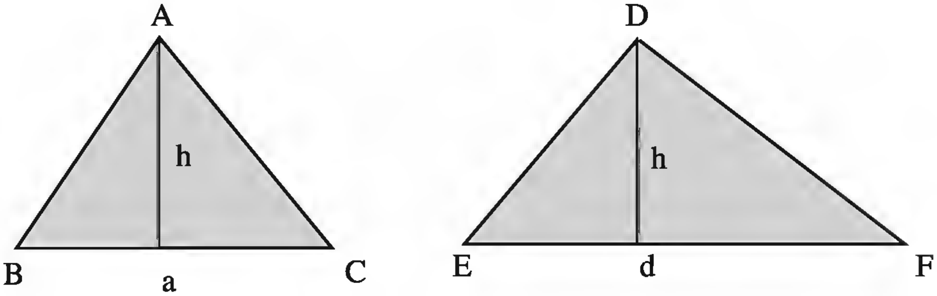


চিত্র –৩

প্রথম ক্ষেত্রে P বিন্দুতে AB রেখাংশ m ঃ n অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত হয়েছে এবং দ্বিতীয় ক্ষেত্রে Q বিন্দুতে AB রেখাংশ m ঃ n অনুপাতে বহির্বিভক্ত হয়েছে বলা হয়। লক্ষণীয় যে, বহির্বিভক্তির বেলায় $m < n$ হলে, Q-A-B (চিত্র–২) এবং $m > n$ হলে Q-B-A (চিত্র–৩)।

কয়েকটি প্রয়োজনীয় জ্যামিতিক সমানুপাত

(১) দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের উচ্চতা সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফলদ্বয় ও ভূমিদ্বয় সমানুপাতিক।



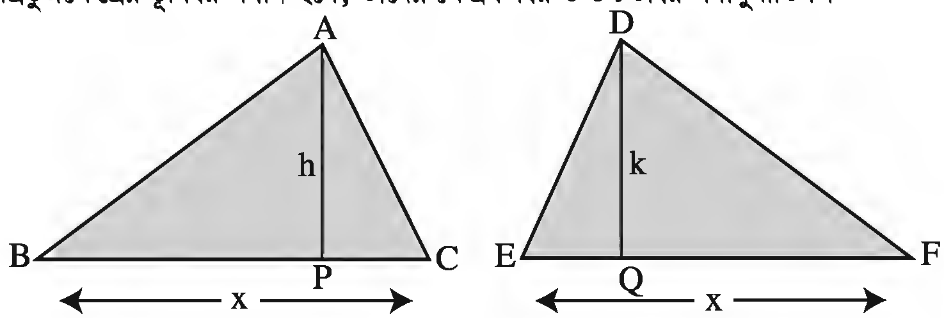
মনে করি, Δ ক্ষেত্র ABC ও Δ ক্ষেত্র DEF এর ভূমি যথাক্রমে BC = a একক ও EF = d একক এবং উভয় ক্ষেত্রের উচ্চতা h একক (সকল দৈর্ঘ্য একই এককে বর্ণিত)।

তাহলে, Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}ah$ বর্গ একক

Δ ক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}h$ বর্গ একক

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল ঃ Δ ক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল = $\dfrac{\frac{1}{2}ah}{\frac{1}{2}dh} = \dfrac{a}{d}$ = BC ঃ EF।

(২) দুইটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ভূমিদ্বয় সমান হলে, তাদের ক্ষেত্রফলদ্বয় ও উচ্চতাদ্বয় সমানুপাতিক।



মনে করি, Δ ক্ষেত্র ABC ও Δ ক্ষেত্র DEF এর উচ্চতা যথাক্রমে AP = h একক ও DQ = k একক এবং উভয় ক্ষেত্রের ভূমি = x একক।

তাহলে, Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}xh$ বর্গ একক

Δ ক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}xk$ বর্গ একক

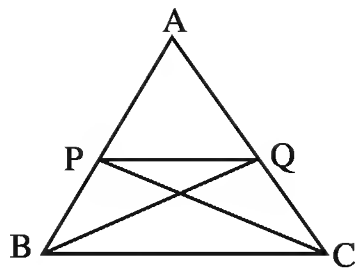
$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল ঃ Δ ক্ষেত্র DEF এর ক্ষেত্রফল = $\dfrac{\frac{1}{2}xh}{\frac{1}{2}xk} = \dfrac{h}{k}$ = AP ঃ DQ।

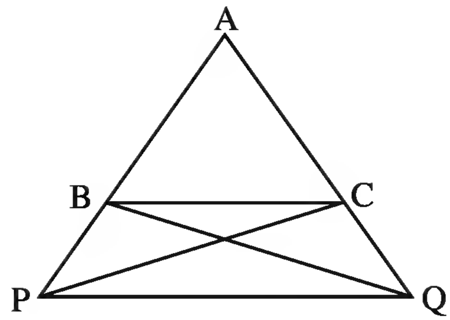
দুইটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য

নিম্নে প্রমাণ ব্যতিরেকে দুইটি জ্যামিতিক প্রতিজ্ঞার বর্ণনা ও ব্যাখ্যা দেওয়া হল। এদের প্রমাণ উচ্চতর গণিতে দেওয়া আছে।

উপপাদ্য–২৫

ত্রিভুজের কোনো এক বাহুর সমান্তরাল যেকোনো রেখাংশ তার অপর দুই বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করে।





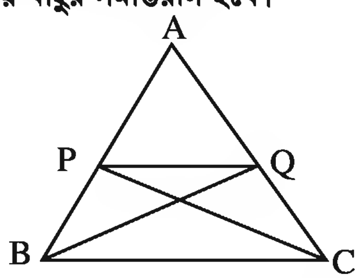
চিত্রে, PQ রেখাংশ ΔABC এর BC বাহুর সমান্তরাল। PQ, AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে যথাক্রমে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। তাহলে, AP ঃ PB = AQ ঃ QC.

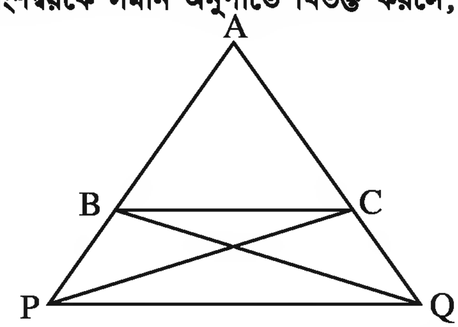
অনুসিদ্ধান্ত : যদি PQ|| BC হয়,

তাহলে, (i) $\frac{AB}{PB} = \frac{AC}{QC}$ এবং (ii) $\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC}$.

উপপাদ্য–২৬

কোন রেখাংশ একটি ত্রিভুজের দুই বাহুকে বা তাদের বর্ধিতাংশদ্বয়কে সমান অনুপাতে বিভক্ত করলে, উক্ত রেখাংশ ত্রিভুজটির তৃতীয় বাহুর সমান্তরাল হবে।

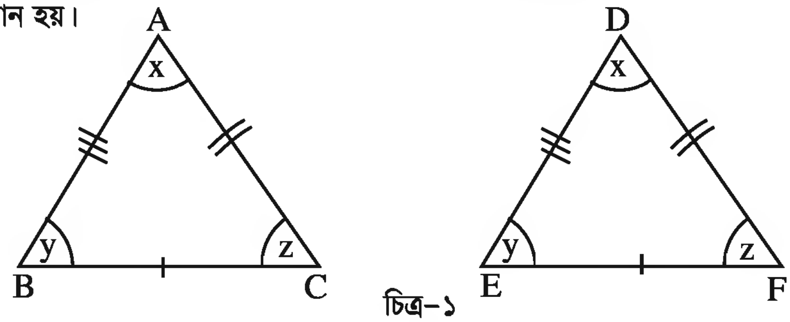




চিত্রে, PQ রেখাংশ ΔABC এর AB ও AC বাহুদ্বয়কে অথবা তাদের বর্ধিতাংশ দুইটিকে সমান অনুপাতে বিভক্ত করেছে, অর্থাৎ AP ঃ PB = AQ ঃ QC. তাহলে, PQ || BC.

৭.২। ত্রিভুজের সদৃশতা

ত্রিভুজের সর্বসমতা সম্পর্কে পূর্বে আলোচনা করা হয়েছে। দুইটি ত্রিভুজ সর্বসম হয় যদি ও কেবল যদি একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, ত্রিভুজ দুইটির অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং অনুরূপ বাহুগুলোও সমান হয়।



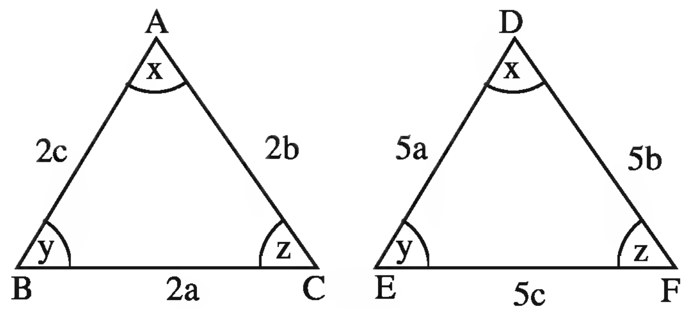
চিত্র–১

ওপরের চিত্রে, Δ ABC ও Δ DEF সর্বসম।

অর্থাৎ, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$ এবং $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$, $BC = EF$, $AC = DF$, $AB = DE$।

এরূপ দুইটি ত্রিভুজের আকার (Size) ও আকৃতি (Shape) একই রকম।

অনেক সময় পাশের চিত্রের মত ভিন্ন আকারের কিন্তু একই আকৃতির ΔABC ও ΔDEF বিবেচনা করা হয় যেখানে,
$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$
এবং $BC : EF = AC : DF = AB : DE$।
এরূপ দুইটি ত্রিভুজকে সদৃশ ত্রিভুজ বলা হয়।



চিত্র–২

সাধারণভাবে,

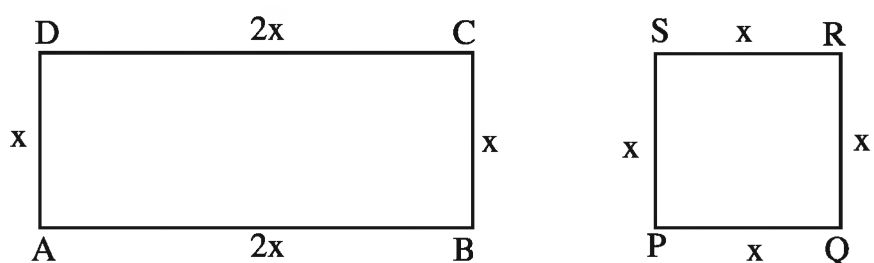
সংজ্ঞা : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির কোণগুলো কোনো ক্রম অনুসারে অপরটির কোণগুলোর সমান হলে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশকোণী (Equiangular) বলা হয়।

সংজ্ঞা : সমান সংখ্যক বাহুবিশিষ্ট দুইটি বহুভুজের একটির শীর্ষবিন্দুগুলোকে যদি অপরটির শীর্ষবিন্দুগুলোর সঙ্গে এমনভাবে মিল করা যায় যে, বহুভুজ দুইটির

(ক) অনুরূপ কোণগুলো সমান হয় এবং
(খ) অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাতগুলো সমান হয়,

তবে বহুভুজ দুইটিকে সদৃশ (Similar) বলা হয়।
সদৃশতা নির্দেশ করতে ~ প্রতীক ব্যবহার করা হয়। যেমন চিত্র –২ এ $\Delta\ ABC$ ও ΔDEF তাদের শীর্ষবিন্দুগুলোর উল্লিখিত ক্রম অনুসারে যে সদৃশ তা $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ লিখে প্রকাশ করা হয়।

লক্ষণীয় যে, দুইটি বহুভুজ সদৃশ হলে তারা অবশ্যই সদৃশকোণী। কিন্তু সদৃশকোণী দুইটি বহুভুজ সদৃশ নাও হতে পারে। যেমন,



চিত্র – ৩

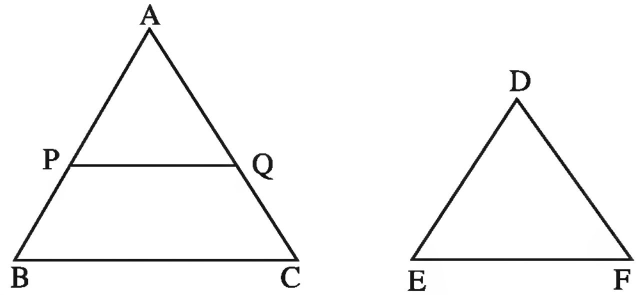
ওপরের চিত্রের ABCD আয়ত ও PQRS বর্গ সদৃশকোণী কিন্তু সদৃশ নয়। তবে দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলেই তারা সদৃশ হয় (নিম্নে বর্ণিত উপপাদ্য–দ্রষ্টব্য)।

ত্রিভুজের সদৃশতা সংক্রান্ত কয়েকটি উপপাদ্য

সদৃশ ত্রিভুজ সংক্রান্ত কয়েকটি উপপাদ্য প্রমাণ ছাড়া বর্ণনা করা হল। উচ্চতর গণিতে এগুলোর প্রমাণ দেওয়া হবে।

উপপাদ্য–২৭

দুইটি ত্রিভুজ সদৃশকোণী হলে তাদের অনুরূপ বাহুগুলোর অনুপাত সমান হবে।

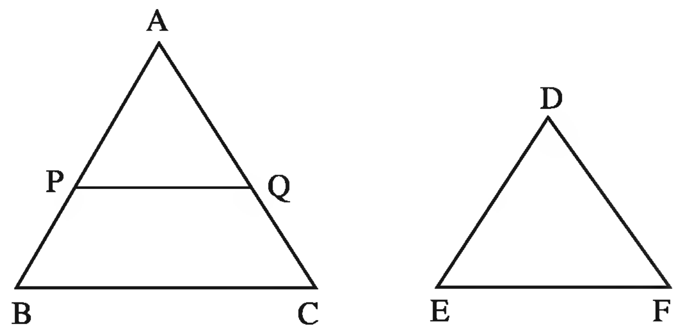


চিত্রে, ΔABC ও ΔDEF এ $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F,$

তাহলে, $\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$.

উপপাদ্য–২৮

দুইটি ত্রিভুজের বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশকোণী এবং তাদের অনুরূপ বাহুর বিপরীত কোণগুলো পরস্পর সমান হবে।

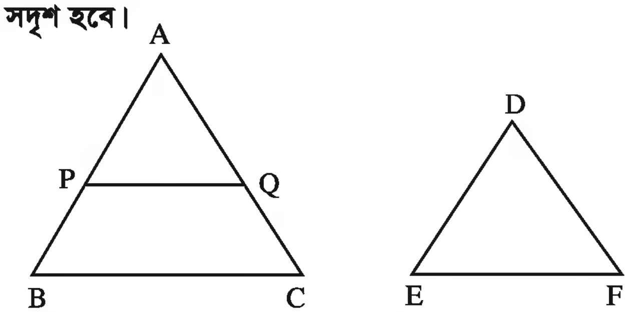


চিত্রে, ΔABC ও ΔDEF এর মধ্যে $\frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF} = \frac{AB}{DE}$.

তাহলে, $\angle A = \angle D, \angle B = \angle E$ এবং $\angle C = \angle F$.

উপপাদ্য–২৯

দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একটির এক কোণ অপরটির এক কোণের সমান হলে এবং সমান সমান কোণ সংলগ্ন বাহুগুলো সমানুপাতিক হলে, ত্রিভুজদ্বয় সদৃশ হবে।

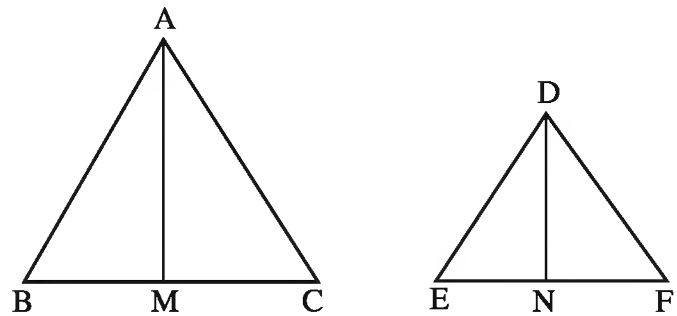


চিত্রে, ΔABC ও ΔDEF এ $\angle A = \angle D$ এবং $AB : DE = AC : DF$.

তাহলে, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

উপপাদ্য–৩০

দুইটি সদৃশ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলদ্বয়ের অনুপাত তাদের যেকোনো দুই অনুরূপ বাহুর ওপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রদ্বয়ের ক্ষেত্রফলের অনুপাতের সমান।



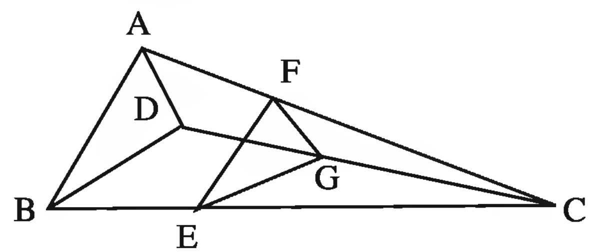
চিত্রে, $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ । অর্থাৎ, $\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$.

এবং $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

তাহলে, $\dfrac{\Delta ABC \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\Delta DEF \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \dfrac{AB^2}{DE^2} = \dfrac{AC^2}{DF^2} = \dfrac{BC^2}{EF^2}$

৭.৩। উদাহরণ

চিত্রে, ABC ও DBC দুইটি ত্রিভুজ। BC এর উপর যেকোনো বিন্দু E, $EF \parallel BA$ এবং $EG \parallel BD$. দেখাও যে, $FG \parallel AD$.



সমাধান : যেহেতু $EF \parallel BA$.

অতএব, $\dfrac{CE}{EB} = \dfrac{CF}{FA}$

আবার, যেহেতু $EG \parallel BD$,

অতএব, $\dfrac{CE}{EB} = \dfrac{CG}{GD}$

$\therefore \dfrac{CF}{FA} = \dfrac{CG}{GD}$

অতএব, $FG \parallel AD$.

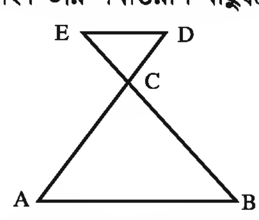
অনুশীলনী – ৭

১। ABC একটি ত্রিভুজ। BC বাহুর সমান্তরাল সরলরেখা DE অপর দুই বাহুকে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে।
   (i) $AB = 3{\cdot}6$ সে.মি., $AC = 2{\cdot}4$ সে.মি. এবং $AD = 2{\cdot}1$ সে.মি., AE এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।
   (ii) $AB = 6$ সে.মি., $AC = 4{\cdot}5$ সে.মি. এবং $AE = 2{\cdot}7$ সে.মি., BD এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২। ABC একটি ত্রিভুজ। BC বাহুর সমান্তরাল রেখাংশ DE অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশদ্বয়কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করেছে। $AB = 4{\cdot}5$ সে.মি., $AC = 3{\cdot}5$ সে.মি. এবং $AD = 7{\cdot}2$ সে. মি. হলে, AE এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩। প্রমাণ কর যে, ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয়ের মধ্যবিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের সমান্তরাল।

৪। চিত্রে,



   (ক) $AC = 2CD$, $BC = 2CE$;
   দেখাও যে, $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.
   (খ) $ED \parallel AB$
   প্রমাণ কর যে, $\Delta ABC \sim \Delta DEC$.

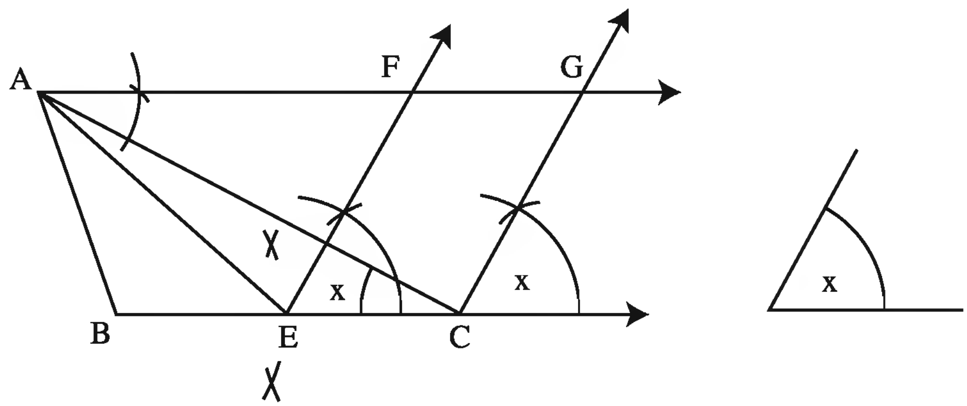
৫। সমকোণী ত্রিভুজের সমকৌণিক শীর্ষ হতে অতিভুজের ওপর লম্ব টানলে যে দুইটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হয় তারা পরস্পর এবং মূল ত্রিভুজের সদৃশ।

অষ্টম অধ্যায়

ক্ষেত্রফল ও অনুপাত সম্পর্কিত সম্পাদ্য

সম্পাদ্য–৮.১

এমন একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে, যার একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র একটি ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



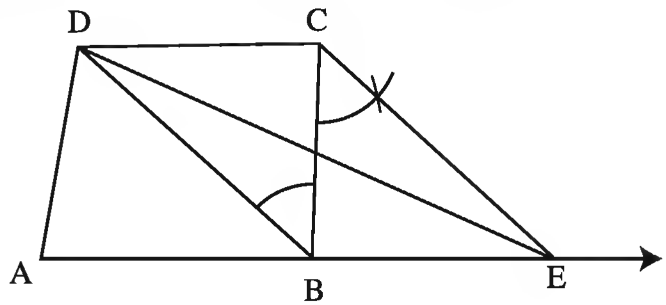
মনে করি, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজক্ষেত্র এবং $\angle x$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। এরূপ একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে, যার একটি কোণ $\angle x$ এর সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন : BC বাহুকে E বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। EC রেখাংশের E বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle CEF$ আঁকি। A বিন্দু দিয়ে BC বাহুর সমান্তরাল AG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা EF রশ্মিকে F বিন্দুতে ছেদ করে। C বিন্দু দিয়ে EF রেখাংশের সমান্তরাল CG রশ্মি টানি এবং মনে করি তা AG রশ্মিকে G বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, ECGF ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ : A, E যোগ করি।
এখন, Δ ক্ষেত্র ABE এর ক্ষেত্রফল $=\Delta$ ক্ষেত্র AEC এর ক্ষেত্রফল [যেহেতু ভূমি BE = ভূমি EC এবং উভয়ের একই উচ্চতা]
$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = 2(Δ ক্ষেত্র AEC এর ক্ষেত্রফল)
আবার, সামান্তরিক ক্ষেত্র ECGF এর ক্ষেত্রফল = 2(Δ ক্ষেত্র AEC এর ক্ষেত্রফল) [যেহেতু, উভয়ে একই ভূমি EC এর ওপর অবস্থিত এবং EC||AG]
$\therefore$ সামান্তরিক ক্ষেত্র ECGF এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল
আবার, $\angle CEF = \angle x$, [যেহেতু, EF||CG, অঙ্কন অনুসারে]
$\therefore$ সামান্তরিক ECGF ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য–৮.২

এমন একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



মনে করি, ABCD একটি চতুর্ভুজক্ষেত্র। এরূপ একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ABCD চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন : D, B যোগ করি। C বিন্দু দিয়ে $CE||DB$ টানি। মনে করি, তা AB বাহুর বর্ধিতাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। D, E যোগ করি।
তাহলে, ΔDAE ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : BD ভূমির ওপর ΔBDC ও ΔBDE অবস্থিত এবং $DB||CE$ [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র BDC এর ক্ষেত্রফল $=$ Δ ক্ষেত্র BDE এর ক্ষেত্রফল

$\therefore$ Δ ক্ষেত্র BDC এর ক্ষেত্রফল $+$ Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল $=$ Δ ক্ষেত্র BDE এর ক্ষেত্রফল $+$
Δ ক্ষেত্র ABD এর ক্ষেত্রফল।

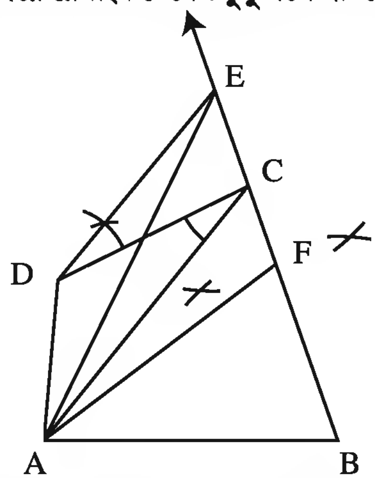
$\therefore$ চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল $=$ Δ ক্ষেত্র ADE এর ক্ষেত্রফল।

অতএব, Δ ADE ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : ওপরের পদ্ধতির সাহায্যে নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট অসংখ্য ত্রিভুজক্ষেত্র আঁকা যাবে।

সম্পাদ্য–৮.৩

কোনো চতুর্ভুজের একটি শীর্ষবিন্দু দিয়ে রেখাংশ টেনে চতুর্ভুজক্ষেত্রটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করতে হবে।



মনে করি, ABCD একটি চতুর্ভুজ এবং A শীর্ষবিন্দু। A বিন্দু দিয়ে রেখাংশ টেনে চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD কে সমদ্বিখণ্ডিত করতে হবে।

অঙ্কন : A, C যোগ করি। D বিন্দু দিয়ে AC এর সমান্তরাল DE টানি।
মনে করি, তা বর্ধিত BC কে E বিন্দুতে ছেদ করে। A, E যোগ করি।
তাহলে, চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফলের সমান ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট Δ ক্ষেত্র ABE অঙ্কিত হল,
BE কে F বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি এবং A, F যোগ করি।

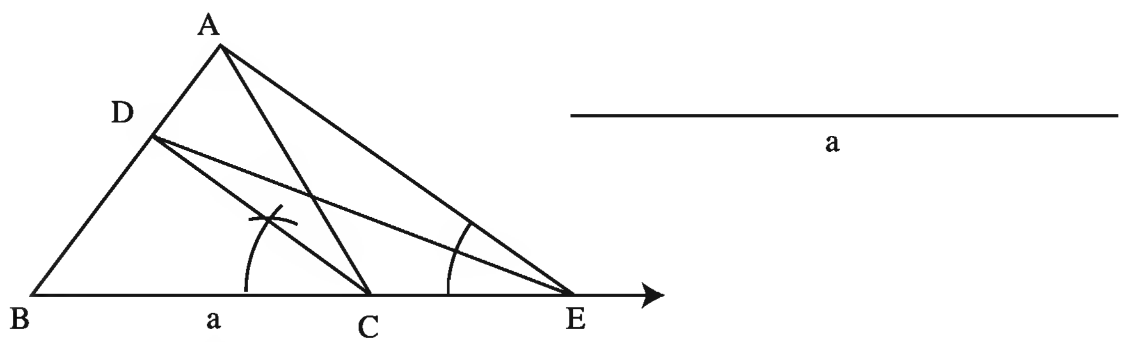
তাহলে, AF চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD কে সমদ্বিখণ্ডিত করবে।

প্রমাণ : $BF = \frac{1}{2}BE$ [যেহেতু, F, BE এর মধ্যবিন্দু]
$\therefore$ Δ ক্ষেত্র ABF এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2}$(Δ ক্ষেত্র ABE এর ক্ষেত্রফল) $= \frac{1}{2}$(চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল)।
অতএব, AF রেখাংশ ABCD চতুর্ভুজক্ষেত্রকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : ওপরের অঙ্কনে, Δ ক্ষেত্র ABC > Δ ক্ষেত্র ADC এ শর্তটি আবশ্যক। নইলে, F বিন্দু BC এর বর্ধিতাংশের ওপর পড়বে এবং তখন ওপরের পদ্ধতিতে অঙ্কন সম্ভব হবে না।

সম্পাদ্য–৮.৪

এমন একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে যার একটি বাহু একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



মনে করি, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং a একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। এরূপ একটি ত্রিভুজ আঁকতে হবে, যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফলের সমান এবং যার একটি বাহু a এর সমান।

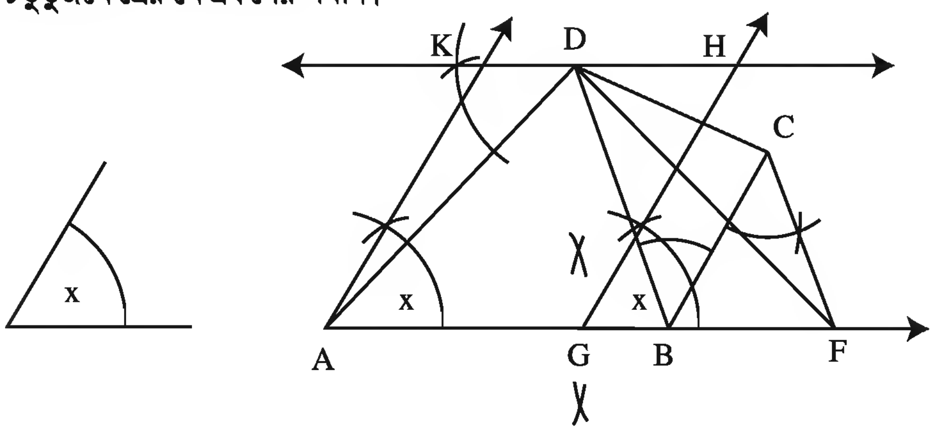
অঙ্কন : ABC ত্রিভুজের BC বাহুকে বর্ধিত করি এবং তা থেকে BE = a নিই।
A, E যোগ করি এবং C বিন্দু দিয়ে CD||EA টানি।
মনে করি, CD, AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে। D, E যোগ করি।
তাহলে, ΔDBE ই উদ্দিষ্ট ত্রিভুজ।

প্রমাণ : Δ ADC ও Δ DCE উভয়ে একই ভূমি DC এবং একই সমান্তরাল যুগল DC ও AE এর মধ্যে অবস্থিত।

সুতরাং, Δ ক্ষেত্র ACD এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র CDE এর ক্ষেত্রফল।
এখন, Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র DBC এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র ADC এর ক্ষেত্রফল
= Δ ক্ষেত্র DBC এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র DCE এর ক্ষেত্রফল
= Δ ক্ষেত্র DBE এর ক্ষেত্রফল
অতএব, ΔDBE ই নির্ণেয় ত্রিভুজ।

সম্পাদ্য–৮.৫

এমন একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ দেওয়া আছে এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্র একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



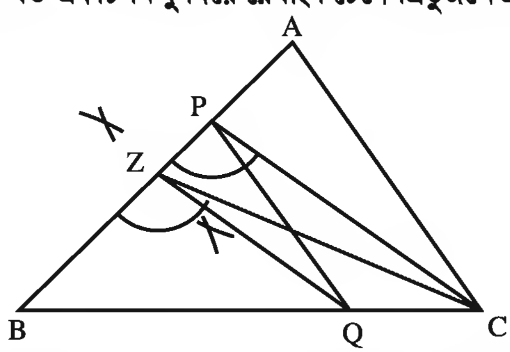
মনে করি, ABCD একটি নির্দিষ্ট চতুর্ভুজক্ষেত্র এবং $\angle x$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। এরূপ একটি সামান্তরিক আঁকতে হবে যার একটি কোণ প্রদত্ত $\angle x$ এর সমান এবং সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।

অঙ্কন : B, D যোগ করি। C বিন্দু দিয়ে $CF||DB$ টানি এবং মনে করি, CF, AB বাহুর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে। AF রেখাংশের মধ্যবিন্দু G নির্ণয় করি। AG রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle x$ এর সমান $\angle GAK$ আঁকি এবং G বিন্দু দিয়ে $GH||AK$ টানি। D বিন্দু দিয়ে $KDH||AG$ টানি এবং মনে করি, তা AK এবং GH কে যথাক্রমে K ও H বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, AGHK ই উদ্দিষ্ট সামান্তরিক।

প্রমাণ : D, F যোগ করি। AGHK একটি সামান্তরিক, [অঙ্কন অনুসারে]
যেখানে, $\angle GAK = \angle x$ আবার, Δ ক্ষেত্র DAF এর ক্ষেত্রফল = চতুর্ভুজক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল এবং সামান্তরিক ক্ষেত্র AGHK এর ক্ষেত্রফল = ত্রিভুজক্ষেত্র DAF এর ক্ষেত্রফল।
অতএব, AGHK ই নির্ণেয় সামান্তরিক।

সম্পাদ্য – ৮.৬

একটি ত্রিভুজের যেকোনো বাহুস্থিত একটি বিন্দু দিয়ে রেখাংশ টেনে ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করতে হবে।



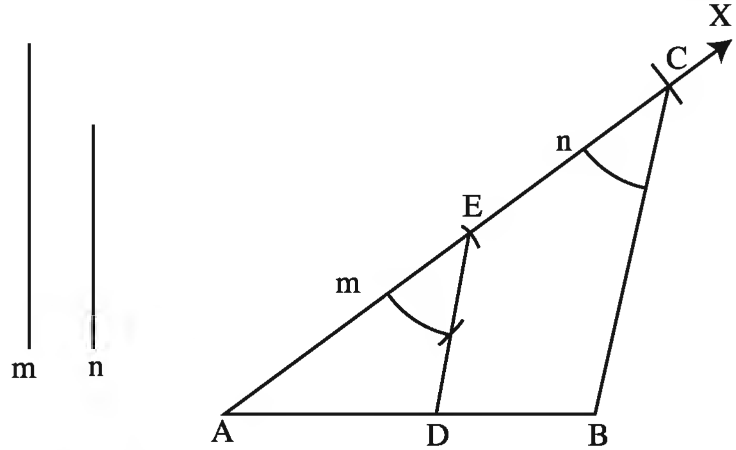
মনে করি, ΔABC এর AB বাহুস্থিত P একটি বিন্দু। P বিন্দু দিয়ে একটি রেখাংশ টেনে ABC ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমদ্বিখণ্ডিত করতে হবে।

অঙ্কন : AB বাহুকে Z বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করি। P, C যোগ করি এবং Z বিন্দু দিয়ে PC রেখাংশের সমান্তরাল ZQ রেখাংশ টানি। ধরি, ZQ, BC বাহুকে Q বিন্দুতে ছেদ করে। P, Q যোগ করি।
তাহলে, PQ রেখাংশ Δ ক্ষেত্র ABC কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

প্রমাণ : Z, C যোগ করি। যেহেতু, Δ ক্ষেত্র ZQP এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র ZQC এর ক্ষেত্রফল [একই ভূমি ZQ এবং একই সমান্তরাল সরলরেখাদ্বয় ZQ ও PC এর মধ্যে অবস্থিত।]
সুতরাং, Δ ক্ষেত্র ZBQ এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র ZQP এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র ZBQ এর ক্ষেত্রফল + Δ ক্ষেত্র ZQC এর ক্ষেত্রফল।
∴ Δ ক্ষেত্র PBQ এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র ZBC এর ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)।

সম্পাদ্য–৮.৭

একটি নির্দিষ্ট রেখাংশকে দুইটি নির্দিষ্ট অনুপাতে অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত করতে হবে।



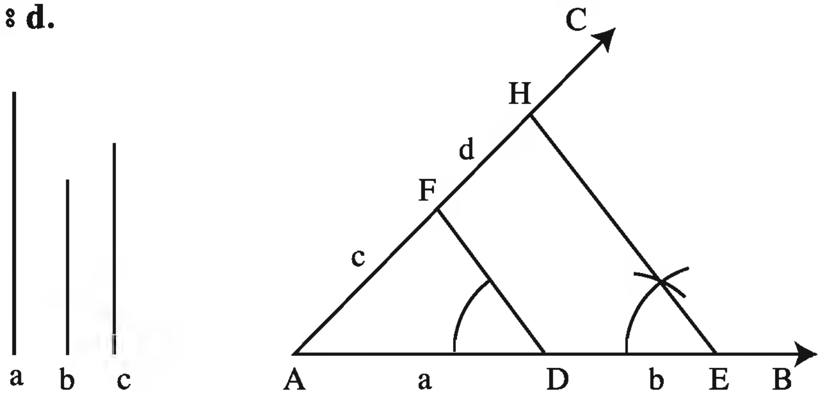
মনে করি, AB একটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। AB কে অন্তঃস্থভাবে m ঃ n অনুপাতে বিভক্ত করতে হবে।

অঙ্কন : AB রেখাংশের A বিন্দু দিয়ে যেকোনো কোণে একটি রশ্মি AX আঁকি। AX থেকে m এর সমান করে AE কাটি। আবার EX থেকে n এর সমান করে EC কাটি। B, C যোগ করি। E বিন্দু দিয়ে ED||CB আঁকি। মনে করি, ED, AB কে D বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, AB রেখাংশ D বিন্দুতে m ঃ n এ অন্তঃস্থভাবে বিভক্ত হয়েছে।

প্রমাণ : Δ ABC এ,
AD ঃ DB = AE ঃ EC. [যেহেতু, ED||CB]
= m ঃ n
অতএব, D বিন্দুই নির্ণেয় বিন্দু যা AB কে m ঃ n অনুপাতে বিভক্ত করে।

সম্পাদ্য–৮.৮

তিনটি নির্দিষ্ট রেখাংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a, b, c. একটি রেখাংশ নির্ণয় করতে হবে যার দৈর্ঘ্য d এমন যে, a ঃ b = c ঃ d.



মনে করি, a, b, c তিনটি রেখাংশ। এরূপ একটি রেখাংশ d নির্ণয় করতে হবে যেন, a ঃ b = c ঃ d হয়।

অঙ্কন : AB ও AC দুইটি পরস্পরচ্ছেদী রশ্মি আঁকি। AB থেকে a এর সমান করে AD, b এর সমান করে DE অংশ নিই। আবার, AC থেকে c এর সমান AF নিই। F, D যোগ করি। E বিন্দু দিয়ে EH||DF আঁকি। মনে করি, EH, AC কে H বিন্দুতে ছেদ করে।

তাহলে, FH ই হবে নির্ণেয় দৈর্ঘ্য d.

প্রমাণ : Δ AEH এ, FD||HE.

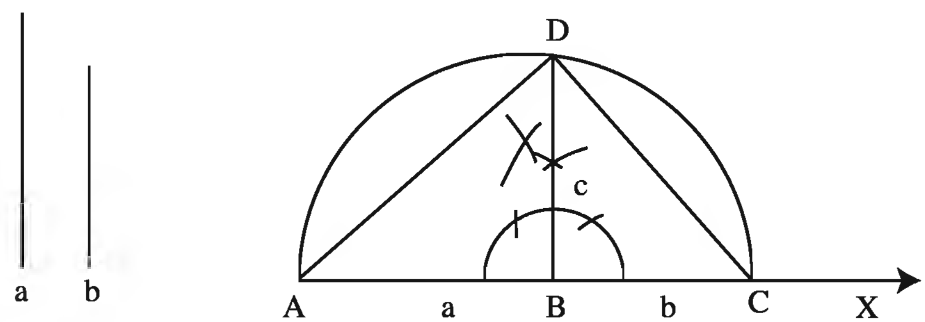
$\therefore$ AD ঃ DE = AF ঃ FH.

অর্থাৎ, a ঃ b = c ঃ d [AD = a, DE = b, AF = c, FH = d]

মন্তব্য : দুইটি রেখাংশ a, b এর তৃতীয় সমানুপাতিক নির্ণয় করতে হলে ওপরের নিয়মে করা যাবে। সেক্ষেত্রে দেখাতে হবে যে, a ঃ b = b ঃ FH.

সম্পাদ্য–৮.৯

দুইটি নির্দিষ্ট রেখাংশের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে a ও b. একটি রেখাংশ নির্ণয় করতে হবে যার দৈর্ঘ্য c এমন যে $ab = c^2$.



মনে করি, a ও b দুইটি নির্দিষ্ট রেখাংশ। এমন একটি রেখাংশ c নির্ণয় করতে হবে যেন a ঃ c = c ঃ b
বা, $ab = c^2$ হয়।

অঙ্কন : যেকোনো রশ্মি AX থেকে AB = a এবং BC = b অংশ নিই। AC কে ব্যাস ধরে ADC অর্ধবৃত্ত আঁকি। AC এর ওপর B বিন্দুতে BD লম্ব টানি। BD অর্ধবৃত্তকে D বিন্দুতে ছেদ করে।
তাহলে, BD ই নির্ণেয় দৈর্ঘ্য c.

প্রমাণ : Δ ADC এ,

$\angle$ADC সমকোণ এবং BD $\perp$ AC [অঙ্কন অনুসারে]

$\therefore$ ΔABD ও ΔCBD সদৃশ।

$\therefore$ $\frac{BD}{AB} = \frac{BC}{BD}$

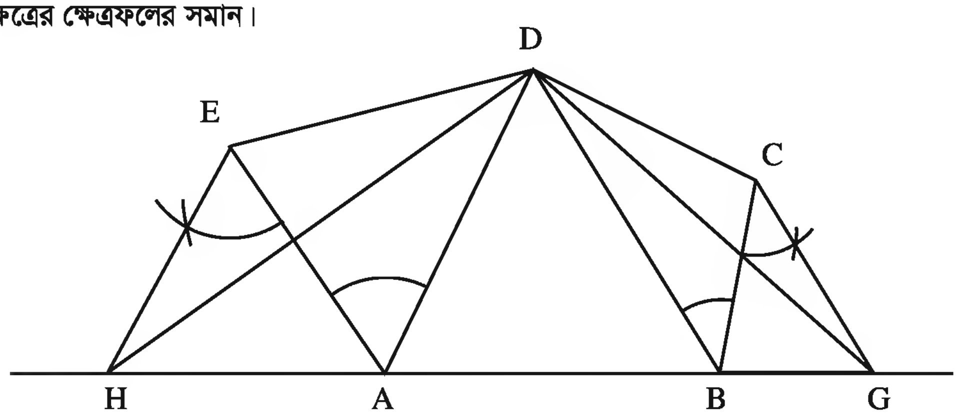
বা, $AB.BC = BD^2$

অর্থাৎ, $ab = c^2$ [AB = a, BC = b, BD = c]

অনুশীলনী–৮

১। এরূপ একটি সামান্তরিক আঁক, যার একটি বাহু একটি প্রদত্ত রেখাংশের সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি প্রদত্ত সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

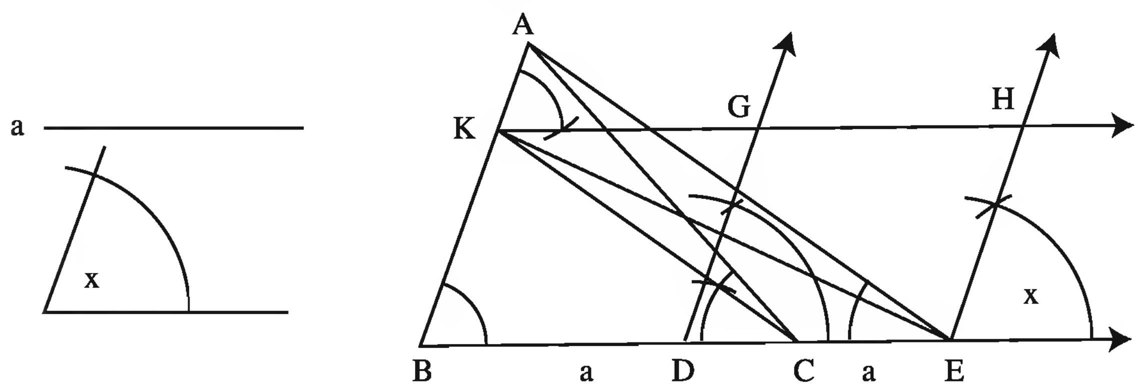
২। এমন একটি ত্রিভুজ আঁক, যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল প্রদত্ত ABCDE পঞ্চভুজ দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



[ইঙ্গিত : প্রথমে EDGA চতুর্ভুজক্ষেত্র আঁকি, যেন EDGA চতুর্ভুজক্ষেত্র = ABCDE পঞ্চভুজক্ষেত্র। তারপর DGH ত্রিভুজ আঁকি, যেন DGH ত্রিভুজক্ষেত্র = EDGA চতুর্ভুজক্ষেত্র।]

৩। একটি ত্রিভুজের যেকোনো বাহুস্থিত একটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে দুইটি সরলরেখা টেনে ত্রিভুজক্ষেত্রটিকে সমত্রিখণ্ডিত কর।

৪। এমন একটি সামান্তরিক আঁক, যার ভূমি একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের সমান ও একটি কোণ একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজক্ষেত্রের সমান।

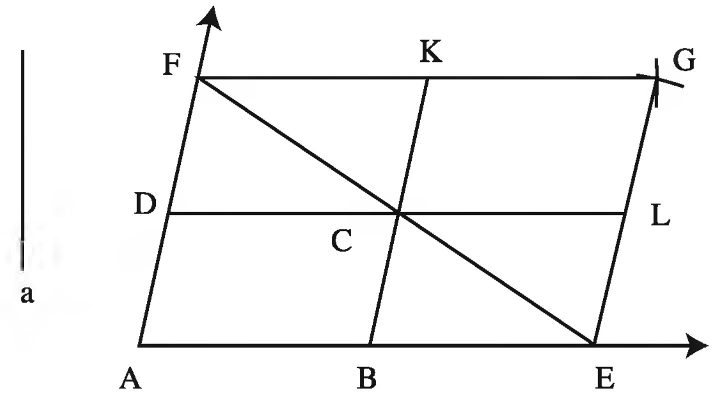


[ইঙ্গিত : মনে করি, ABC একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজক্ষেত্র। $\angle x$ ও a যথাক্রমে সামান্তরিকের নির্দিষ্ট কোণ ও বাহু। BC রেখা থেকে BE = 2a নিই।

BE ভূমির ওপর এমন একটি ত্রিভুজ KBE আঁকি যেন Δ ক্ষেত্র KBE এর ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল।

এখন, EDGH সামান্তরিক আঁকি যেন EDGH ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = Δ ক্ষেত্র KBE এর ক্ষেত্রফল এবং $\angle EDG = \angle x$]।

৫। এরূপ একটি সামান্তরিক আঁক, যার একটি বাহু একটি নির্দিষ্ট রেখাংশের সমান এবং যা দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি নির্দিষ্ট সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান।



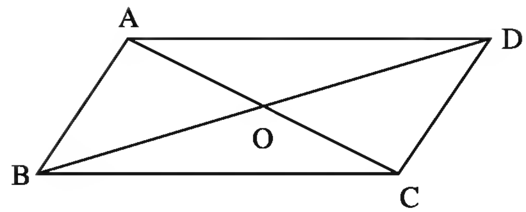
[**ইঙ্গিত :** ABCD নির্দিষ্ট সামান্তরিক এবং a ঈপ্সিত সামান্তরিকের একটি বাহু। AB রেখাংশকে E পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন BE = a হয়। EC রেখা টানি। এটি AD বাহুর বর্ধিতাংশকে F বিন্দুতে ছেদ করে। AEGF সামান্তরিকটি সম্পূর্ণ করি। BC ও DC রেখা যথাক্রমে FG ও EG রেখাকে K ও L বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, KGL ঈপ্সিত সামান্তরিক।]

৬। ABCD একটি চতুর্ভুজ। X, DC বাহুস্থিত একটি বিন্দু। X কে শীর্ষবিন্দু ও AB বরাবর ভূমি নিয়ে এমন একটি ত্রিভুজ আঁক, যেন ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল চতুর্ভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফলের সমান হয়।

চতুর্ভুজ সংক্রান্ত

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১।



ABCD সামান্তরিক হলে, নিচের কোন উত্তরটি সঠিক?

ক. AC = BC খ. AD = AC

গ. AO = OB ঘ. OA = OC

২। একটি চতুর্ভুজ আঁকার জন্য নিচের কোন উপাত্তগুলো প্রয়োজন?

ক. তিনটি বাহু ও দুইটি কর্ণ

খ. দুইটি কর্ণের খণ্ডিত অংশসমূহ ও একটি বাহু

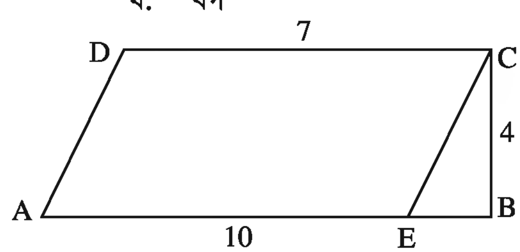
গ. চারটি বাহু ও দুইটি কোণ

ঘ. দুইটি বাহু ও দুইটি কোণ

৩। ABCD চতুর্ভুজে AB II CD, AC ≠ BD এবং $\angle A = 90^0$ হলে, নিচের কোনটি সঠিক চতুর্ভুজ নির্দেশ করে?

ক. আয়ত খ. সামান্তরিক

গ. রম্বস ঘ. বর্গ



চিত্রে AB=10 একক, CD=7 একক, BC=4 একক, $BC \perp AB$ এবং AB II CD

ওপরের তথ্যানুসারে (৪-৬) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৪। নিচের কোনটি AD এর সঠিক মান?

ক. 3 খ. 4

গ. 5 ঘ. 6

৫। AECD চতুর্ভুজক্ষেত্রের $\angle A = 90^0$ হলে, চতুর্ভুজটির প্রকৃতি কীরূপ হবে?

ক. সামান্তরিক খ. আয়ত

গ. ট্রাপিজিয়াম ঘ. রম্বস

৬। Δ ADC এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ একক?

ক. 28 খ. 20

গ. 14 ঘ. 6

৭। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. সামান্তরিকের কর্ণদ্বয় পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে

ii. ABCD চতুর্ভুজের AB II CD এবং AD ≠ BC; ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম

iii. চতুর্ভুজের বিপরীত বাহুগুলো সমান ও সমান্তরাল এবং একটি কোণ 90^0 হলে তা একটি আয়ত।

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোন উত্তরটি সঠিক?

ক. i ও ii খ. ii ও iii

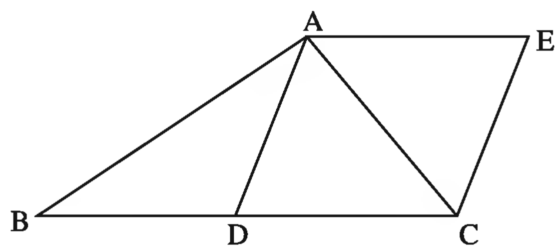
গ. i ও iii ঘ. i, ii ও iii

৮। ABCD আয়তক্ষেত্রের AB বাহুর ওপর P যেকোনো একটি বিন্দু। ABCD ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে.মি. এবং PBC ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 20 বর্গ সে.মি.। Δ APD এর ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক. 50 খ. 40

গ. 30 ঘ. 20

সৃজনশীল প্রশ্ন



Δ ABC এ AD মধ্যমা। AD II CE, DC II AE এবং AD = AE.

ক. ADCE কোন ধরনের চতুর্ভুজ এবং কেন?

খ. B বিন্দু দিয়ে একটি রেখা টেনে ABCE চতুর্ভুজটি দ্বিখণ্ডিত কর। (অঙ্কনের চিহ্ন ও বিবরণ আবশ্যক)

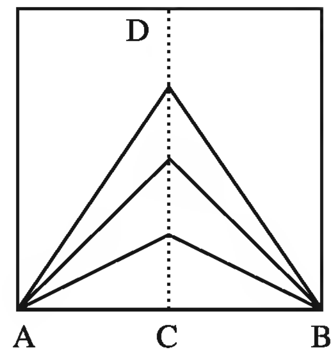
গ. AC এর মধ্যবিন্দু O নির্ণয় করে প্রমাণ কর যে, O বিন্দু DE রেখারও মধ্যবিন্দু ।

নবম অধ্যায়

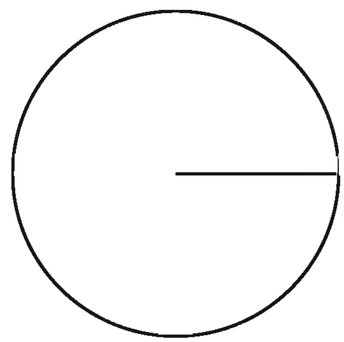
সঞ্চারপথ বিষয়ক উপপাদ্য

৯.১। সঞ্চারপথ

মনে করি, আয়তক্ষেত্রাকার একটি টেবিলের ওপর একটি পিঁপড়া ছেড়ে দেওয়া হল। পিঁপড়াটি টেবিলের দুই কৌণিক প্রান্ত বিন্দু A ও B থেকে সমান দূরত্ব বজায় রেখে A, B এর মধ্যবিন্দু C থেকে CD বরাবর চলতে লাগল। এখানে পিঁপড়াটি একটি শর্ত মেনে অগ্রসর হচ্ছে। তার এই চলার পথটি একটি সঞ্চারপথ। এক্ষেত্রে সঞ্চারপথটি একটি সরলরেখা।



এক গাছি পাতলা সুতার এক প্রান্ত একটি আলপিনের সঙ্গে এবং অপর প্রান্ত একটি পেন্সিলের সঙ্গে বাঁধি। সুতা বাঁধা আলপিনটি এক খন্ড কাগজের ওপর চেপে ধরে সুতা টান রেখে অপর প্রান্তে বাঁধা পেন্সিলটির অগ্রভাগ কাগজের ওপর ঘোরাই। পেন্সিলের অগ্রভাগের চলার পথটি একটি সঞ্চারপথ। এখানেও পেন্সিলের অগ্রভাগটি শর্তাধীনে ঘোরান হচ্ছে। এক্ষেত্রে সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত।



সাধারণভাবে বলা যায়,

প্রদত্ত কোনো শর্তাধীনে সঞ্চারপথ হচ্ছে একটি রেখা যার এবং কেবল যার বিন্দুগুলো প্রদত্ত শর্ত মানে। এই সঞ্চারপথকে প্রদত্ত শর্ত পালনকারী কোনো চলক বিন্দু বা এরূপ সকল বিন্দুর সঞ্চার পথ বলে বর্ণনা করা হয়।

উল্লেখ্য যে, কোনো সঞ্চারপথ নির্দিষ্ট করার জন্য লক্ষ রাখতে হয় যে,

(ক) সঞ্চারপথ বর্ণনাকারী শর্ত সিদ্ধ করে এমন প্রত্যেক বিন্দু সঞ্চারপথে অবস্থিত হয়; এবং

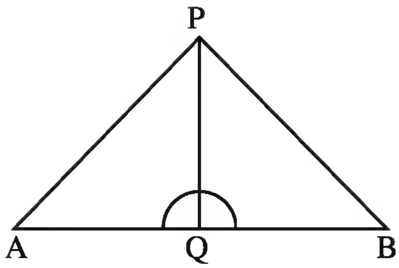
(খ) সঞ্চারপথে অবস্থিত প্রত্যেক বিন্দু প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে।

৯.২। দুইটি উপপাদ্য

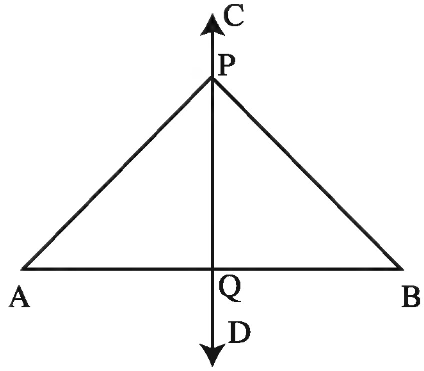
নিম্নে সঞ্চারপথ বিষয়ক দুইটি উপপাদ্য বর্ণনা ও প্রমাণ করা হল।

উপপাদ্য–৩১

দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী কোনো বিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক।



চিত্র–১



চিত্র–২

মনে করি, A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু। প্রমাণ করতে হবে যে, A ও B থেকে সমদূরবর্তী কোনো বিন্দুর সঞ্চারপথ AB রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক হবে। অর্থাৎ (১) A ও B থেকে সমদূরবর্তী যেকোনো বিন্দু AB রেখাংশের লম্ব সমদ্বিখণ্ডক রেখায় অবস্থিত হবে এবং (২) AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডকের যেকোনো বিন্দু A ও B হতে সমান দূরে অবস্থিত হবে।

এখন, (১) প্রথমে A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী কোনো বিন্দু P নিই (চিত্র–১) এবং প্রমাণ করি যে, P বিন্দু AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখায় অবস্থিত।

অঙ্কন : A ও B, P ও A এবং P ও B যোগ করি। AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু Q নিই এবং P ও Q যোগ করি।

প্রমাণ : লক্ষ করি যে, P বিন্দু AB রেখাংশে অবস্থিত হলে P ও Q একই বিন্দু হবে এবং P অবশ্যই AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখায় অবস্থিত। তা না হলে,
যদি P বিন্দুটি AB রেখাংশের বাইরে অবস্থান করে
তাহলে, $PA = PB$ [কল্পনা]
এবং $AQ = BQ$ [অঙ্কন]
এখন, ΔPAQ ও ΔPBQ এ $PA = PB$, $AQ = BQ$ এবং $QP = QP$ [সাধারণ বাহু]।
$\therefore \Delta PAQ \cong \Delta PBQ$
$\therefore \angle PQA = \angle PQB$

যেহেতু এই কোণ দুইটি রৈখিক যুগল কোণ এবং এদের পরিমাপ সমান, সুতরাং এরা প্রত্যেকে এক সমকোণ।
$\therefore$ PQ রেখা AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক অর্থাৎ P বিন্দু AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখায় অবস্থিত।

আবার, (২) এখন AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক CD রেখায় কোনো বিন্দু P নিই (চিত্র–২) এবং প্রমাণ করি যে, P বিন্দু A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

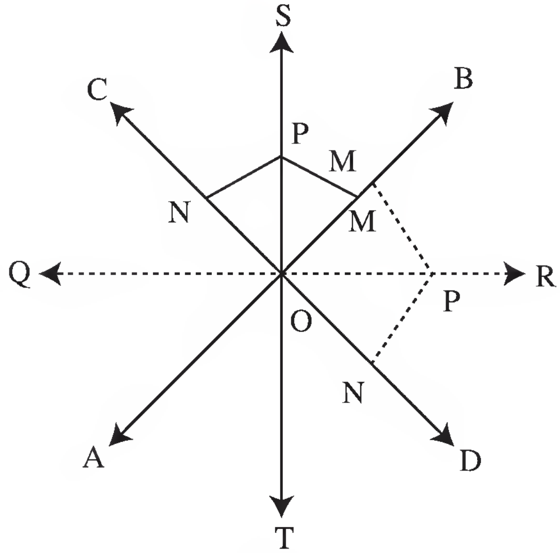
অঙ্কন : P ও A এবং P ও B যোগ করি।

প্রমাণ : কল্পনা অনুসারে CD রেখা AB রেখাংশের মধ্যবিন্দু Q দিয়ে যায়। অর্থাৎ $AQ = BQ$।
তদুপরি, $\angle AQP = \angle BQP =$ এক সমকোণ।
লক্ষ করি যে, P বিন্দু AB রেখাংশে অবস্থিত হলে P ও Q একই বিন্দু হবে। অর্থাৎ P বিন্দু A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী হবে। যদি P বিন্দু AB রেখাংশের বাইরে অবস্থান করে
তাহলে, ΔPAQ ও ΔPBQ এ $AQ = BQ$, $QP = QP$ (সাধারণ বাহু)
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AQP =$ অন্তর্ভুক্ত $\angle BQP$।
$\therefore \Delta PAQ \cong \Delta PBQ$
$\therefore PA = PB$
অর্থাৎ, P বিন্দু A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।

উপপাদ্য–৩২

পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখা থেকে সমদূরবর্তী কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ উক্ত নির্দিষ্ট রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় হবে।

মনে করি, AB এবং CD দুইটি পরস্পরচ্ছেদী রেখা O বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ করতে হবে যে, AB ও CD হতে সমান দূরে অবস্থিত কোন বিন্দুর সঞ্চারপথ AB এবং CD এর অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয় হবে; অর্থাৎ (১) AB এবং CD হতে সমান দূরে অবস্থিত কোন বিন্দু AB এবং CD এর অন্তর্ভুক্ত কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের যেকোনোটির ওপর অবস্থিত হবে এবং (২) উক্ত সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের যেকোনোটির ওপর অবস্থিত যেকোনো বিন্দু AB এবং CD হতে সমান দূরে অবস্থিত হবে। এখন, (১) প্রথমে AB ও CD রেখা থেকে সমদূরবর্তী কোনো বিন্দু P নিই (চিত্র–১) এবং প্রমাণ করি যে, P বিন্দু AB ও CD রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক রেখাদ্বয়ের একটিতে অবস্থিত।



চিত্র–১

অঙ্কন : P, O যোগ করে উভয় দিকে বর্ধিত করি। P থেকে AB ও CD এর ওপর যথাক্রমে PM ও PN লম্বরেখাংশ অঙ্কন করি।

প্রমাণ : P থেকে AB রেখা ও CD রেখার দূরত্ব যথাক্রমে PM ও PN।

সুতরাং $PM = PN$।

Δ POM ও Δ PON সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

অতিভুজ PO = অতিভুজ PO (সাধারণ বাহু) এবং $PM = PN$.

$\therefore \Delta POM \cong \Delta PON$

$\therefore \angle POM = \angle PON$

সুতরাং, PO রেখা AB ও CD এর রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত একটি কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। অর্থাৎ, P বিন্দু প্রদত্ত রেখা দুইটির অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের একটিতে অবস্থিত।

আবার, (২) এখন AB ও CD এর অন্তর্ভুক্ত কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডক QR রেখা অথবা ST রেখা যেকোনোটিতে অবস্থিত P বিন্দু নিই (চিত্র–২) এবং প্রমাণ করি যে, P বিন্দুটি AB রেখা ও CD রেখা থেকে সমদূরবর্তী।

অঙ্কন : P বিন্দু থেকে AB ও CD এর ওপর যথাক্রমে PM ও PN লম্ব রেখাংশ অঙ্কন করি।

প্রমাণ : এখানে PM ও PN যথাক্রমে AB ও CD থেকে P বিন্দুর দূরত্ব নির্দেশ করে।

ΔPOM ও ΔPON এ

$\angle POM = \angle PON$ [কল্পনা অনুসারে]

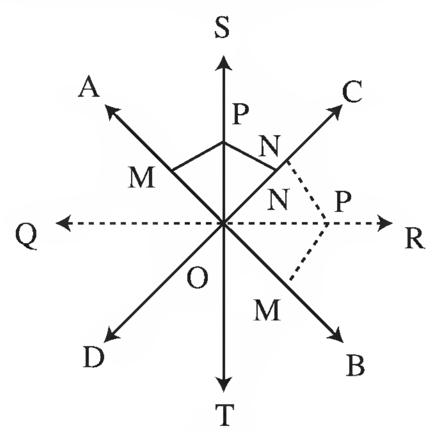
$\angle PMO = \angle PNO$ [$PM \perp OA$, $PN \perp OC$] এবং

$PO = PO$ (সাধারণ বাহু)

$\therefore \Delta POM \cong \Delta PON$

$\therefore PM = PN$

অর্থাৎ, P বিন্দু AB রেখা ও CD রেখা থেকে সমদূরবর্তী। [প্রমাণিত]

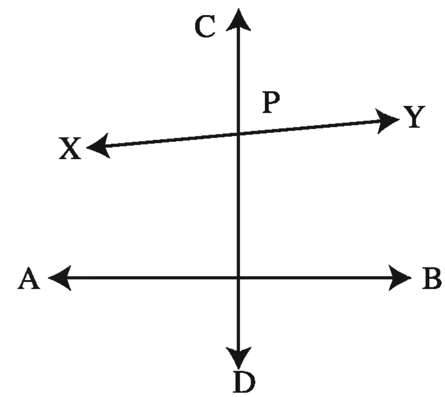


চিত্র–২

সঞ্চারপথসমূহের ছেদবিন্দু

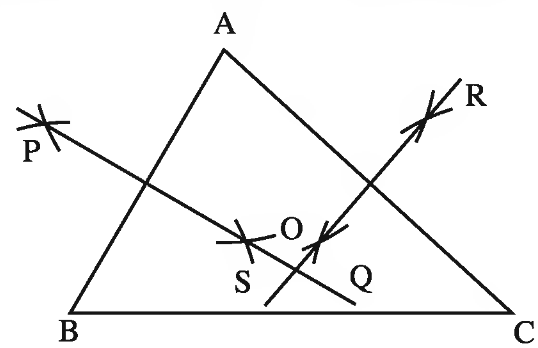
যদি বিন্দুসমূহ একই সময়ে দুই বা ততোধিক শর্ত পূরণ করে তবে একই সময় একাধিক সঞ্চারপথ পাওয়া যায়। এসব সঞ্চারপথসমূহের ছেদবিন্দু প্রদত্ত সকল শর্ত পূরণ করে।

উদাহরণ ১। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা XY এ অবস্থিত এমন কোনো বিন্দু নির্ণয় কর যা XY এর বহিঃস্থ A ও B দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।



A ও B থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ AB সরলরেখার লম্বসমদ্বিখণ্ডক।
অতএব, উদ্দিষ্ট বিন্দুটি CD রেখাতে অবস্থিত হবে।
আবার, উদ্দিষ্ট বিন্দুটি XY এ অবস্থিত হবে।
অতএব, CD ও XY সরলরেখার ছেদবিন্দু P নির্ণেয় বিন্দু।

উদাহরণ ২। একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় এরূপ তিনটি নির্দিষ্ট বিন্দু A, B ও C থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুটি নির্ণয় কর।



A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ AB এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ।
আবার, A ও C বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ AC এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS।
A, B ও C একই সরলরেখায় অবস্থিত নয় বলে PQ ও RS ছেদ করবে। ছেদবিন্দু O উভয় সঞ্চারপথের একমাত্র সাধারণ বিন্দু বলে তা A, B ও C থেকে সমদূরবর্তী হবে। সুতরাং O বিন্দুই নির্ণেয় বিন্দু হবে।

অনুশীলনী–৯

১। একটি নির্দিষ্ট সরলরেখা থেকে নির্দিষ্ট দূরত্বে অবস্থিত কোনো বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

২। দুইটি সমান্তরাল সরলরেখা থেকে সমদূরবর্তী কোনো বিন্দুর সঞ্চারপথ নির্ণয় কর।

৩। Δ ABC এর AB, BC ও CA বাহু তিনটি থেকে সমদূরবর্তী বিন্দুটি নির্ণয় কর।

৪। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের যেকোনো কোণের অন্তর্দ্বিখণ্ডক ও অপর দুইটি কোণের বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় সমবিন্দু।

৫। প্রমাণ কর যে, Δ ABC এর AB, BC ও CA বাহু তিনটির লম্বসমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু হবে।

৬। প্রমাণ কর যে, ত্রিভুজের কোণগুলোর সমদ্বিখণ্ডকত্রয় সমবিন্দু।

৭। AB ও AC দুইটি নির্দিষ্ট সরলরেখা। AB থেকে 2 সে. মি. এবং AC থেকে 3 সে. মি. দূরবর্তী বিন্দুটি নির্ণয় কর।

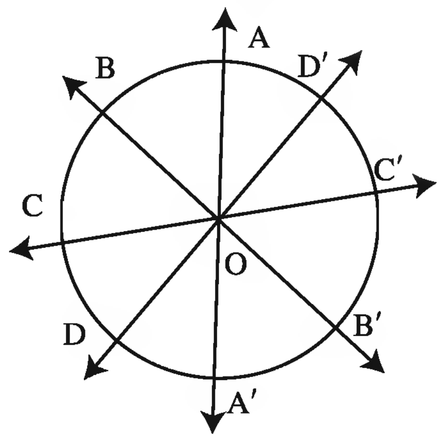
দশম অধ্যায়

বৃত্ত সম্পর্কীয় উপপাদ্য

১০.১। বৃত্ত

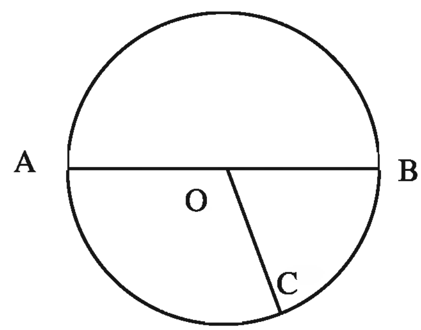
সংজ্ঞা : যদি O সমতলের কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু হয় এবং r একটি নির্দিষ্ট ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা হয়, তবে সমতলস্থ যে সকল বিন্দু O থেকে r দূরত্বে অবস্থিত, তাদের সেটকে বৃত্ত বলা হয়, যার কেন্দ্র O ও ব্যাসার্ধ r.

মন্তব্য : O বিন্দু দিয়ে সমতলে অবস্থিত অসংখ্য সরলরেখা যায়। এরূপ প্রত্যেক সরলরেখায় দুইটি ও কেবল দুইটি বিন্দু আছে O থেকে যাদের দূরত্ব $r > 0$। সুতরাং বৃত্ত এবং বৃত্তের কেন্দ্রগামী যেকোনো সরলরেখার দুইটি ও কেবল দুইটি সাধারণ বিন্দু রয়েছে।



পাশের চিত্রে, A, A′, B, B′, C, C′, D, D′ বিন্দুগুলো বৃত্তস্থ বিন্দু। বৃত্তটি একটি রেখা–যা কোনো সরলরেখা নয়। কোনো সরলরেখাতেই তার বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী দুই এর অধিক বিন্দু নাই।

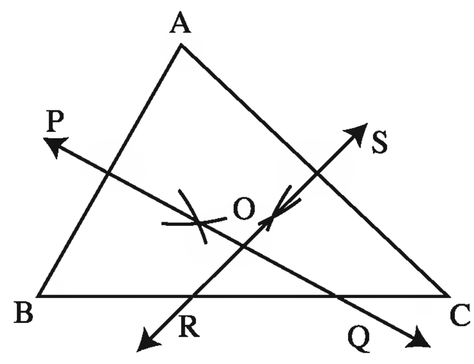
মন্তব্য : বৃত্তের কেন্দ্র থেকে বৃত্তের কোনো বিন্দুর দূরত্বকে ঐ বৃত্তের ব্যাসার্ধ বলা হয়েছে। কেন্দ্র ও বৃত্তস্থ কোনো বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকেও সাধারণত বৃত্তের একটি ব্যাসার্ধ বলা হয়। যেমন, চিত্রে O বৃত্তের কেন্দ্র, A, B ও C বৃত্তস্থ বিন্দু। OA, OB ও OC প্রত্যেকে বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।



সংজ্ঞা : সমতলস্থ কতিপয় বিন্দুকে সমবৃত্ত বলা হয় যদি বিন্দুগুলো দিয়ে একটি বৃত্ত যায় অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত থাকে যাতে বিন্দুগুলো অবস্থিত হয়।

মন্তব্য : যেকোনো দুইটি ভিন্ন বিন্দু A ও B সমবৃত্ত। AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক রেখার যেকোনো বিন্দু O থেকে A ও B সমদূরবর্তী (উপপাদ্য–২৫)। সুতরাং, যে বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OA তাতে A ও B বিন্দু অবস্থিত।

সমরেখ নয় সমতলের এরূপ তিনটি ভিন্ন বিন্দু A, B, C সমবৃত্ত। AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক PQ রেখার যেকোনো বিন্দু থেকে A ও B সমদূরবর্তী এবং AC রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক RS রেখার যেকোনো বিন্দু থেকে A ও C সমদূরবর্তী (উপপাদ্য–২৫)। AB রেখাংশ ও BC রেখাংশের ধারক রেখা ভিন্ন হওয়াতে সমতলস্থ PQ ও RS রেখা সমান্তরাল নয়। সুতরাং PQ ও RS রেখার একটি ও কেবল একটি সাধারণ বিন্দু আছে। এই অনন্য সাধারণ বিন্দু



O থেকে A, B, C বিন্দুত্রয় সমদূরবর্তী এবং সমতলের অন্য কোনো বিন্দু থেকে A, B, C, সমদূরবর্তী নয়। সুতরাং যে বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ OA, তাতে A, B ও C বিন্দু অবস্থিত এবং A, B ও C দিয়ে যায় এমন অন্য কোনো বৃত্ত নাই।
ওপরের আলোচনা থেকে দেখা যায় যে,

প্রতিজ্ঞা ১০.১। সমরেখ নয় সমতলের এরূপ তিনটি বিন্দু একটি ও কেবল একটি বৃত্ত নির্দিষ্ট করে যাতে বিন্দু তিনটি থাকে।

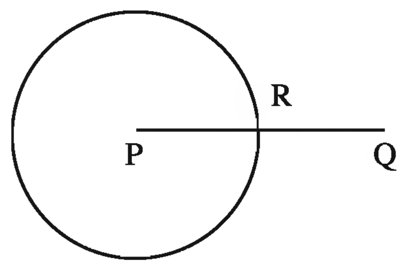
বৃত্তের অভ্যন্তর ও বহির্ভাগ

সংজ্ঞা : যদি কোনো বৃত্তের কেন্দ্র O এবং ব্যাসার্ধ r হয় তবে O থেকে সমতলের যে সকল বিন্দুর দূরত্ব r থেকে কম তাদের সেটকে বৃত্তটির অভ্যন্তর এবং O থেকে সমতলের যে সকল বিন্দুর দূরত্ব r থেকে বেশি তাদের সেটকে বৃত্তটির বহির্ভাগ বলা হয়।

মন্তব্য : বৃত্ত, বৃত্তের অভ্যন্তর ও বৃত্তের বহির্ভাগ সমতলের তিনটি উপসেট যারা পরস্পর নিশ্ছেদ। বৃত্তের বহির্ভাগের কোনো বিন্দুকে বৃত্তের একটি বহিঃস্থ বিন্দু বলা হয়।
বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ সম্পূর্ণভাবে বৃত্তের অভ্যন্তরেই থাকে।

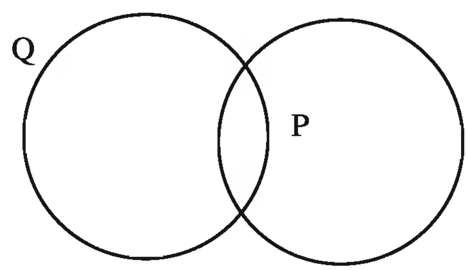
বৃত্তের অবিচ্ছিন্নতা বিষয়ক দুইটি সূত্র

(ক) কোনো বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু ও বহিঃস্থ একটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ বৃত্তটিকে একটি ও কেবল একটি বিন্দুতে ছেদ করে।



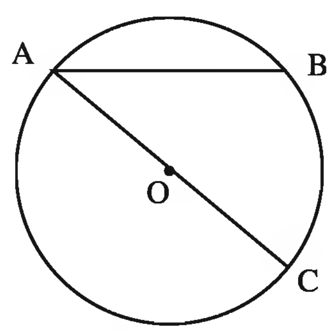
চিত্রে, P বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু এবং Q বৃত্তের বহিঃস্থ একটি বিন্দু। PQ রেখাংশ বৃত্তটিকে কেবল R বিন্দুতে ছেদ করে।

(খ) যদি কোনো বৃত্তের একটি বিন্দু অপর একটি বৃত্তের অভ্যন্তরে থাকে এবং প্রথমোক্ত বৃত্তের অপর একটি বিন্দু শেষোক্ত বৃত্তের বহির্ভাগে থাকে, তবে বৃত্তদ্বয়ের দুইটি ও কেবল দুইটি ছেদ বিন্দু থাকে।



১০.২। বৃত্তের জ্যা ও ব্যাস

সংজ্ঞা : বৃত্তের দুইটি ভিন্ন বিন্দুর সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তটির একটি জ্যা বলা হয়। বৃত্তের কোনো জ্যা যদি কেন্দ্র দিয়ে যায় তবে জ্যাটিকে বৃত্তের ব্যাস বলা হয়।



চিত্রে, AB ও AC বৃত্তটির দুইটি জ্যা। AC ব্যাস। O, বৃত্তটির কেন্দ্র।

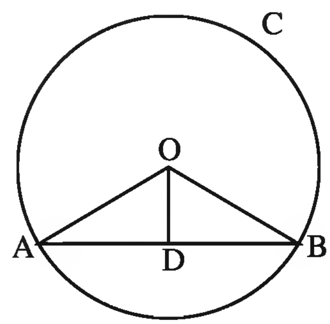
মন্তব্য। বৃত্তের কেন্দ্র প্রত্যেক ব্যাসের মধ্যবিন্দু। সুতরাং প্রত্যেক ব্যাসের দৈর্ঘ্য $2r$, যেখানে r বৃত্তটির ব্যাসার্ধ।

কতিপয় উপপাদ্য

উপপাদ্য–৩৩

বৃত্তের ব্যাস ভিন্ন কোন জ্যা এর মধ্যবিন্দু ও কেন্দ্রের সংযোজক রেখাংশ ঐ জ্যা এর ওপর লম্ব।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে AB ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা এবং D এই জ্যা এর মধ্য বিন্দু। O, D যোগ করি।
প্রমাণ করতে হবে যে, OD রেখাংশ AB জ্যা এর ওপর লম্ব।



অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

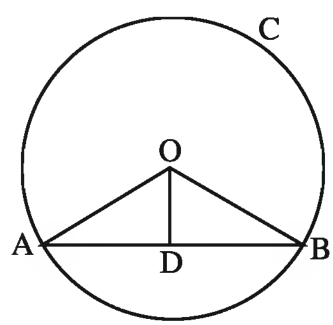
প্রমাণ : Δ OAD এবং Δ OBD এ
AD = BD [D, AB এর মধ্যবিন্দু]
OA = OB [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং OD = OD [সাধারণ বাহু]
$\therefore$ $\Delta OAD \cong \Delta OBD$
$\therefore$ $\angle ODA = \angle ODB$.
যেহেতু কোণদ্বয় রৈখিক যুগল কোণ এবং তাদের পরিমাপ সমান,
সুতরাং, $\angle ODA = \angle ODB$ = এক সমকোণ।
অতএব, $OD \perp AB$.

উপপাদ্য–৩৪

বৃত্তের কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন অন্য কোন জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব ঐ জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে AB ব্যাস নয় এমন একটি জ্যা এবং কেন্দ্র O থেকে এই জ্যা এর ওপর OD লম্ব।

প্রমাণ করতে হবে যে, OD, AB জ্যা-কে D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত করে,
অর্থাৎ, AD = BD.



অঙ্কন : O, A এবং O, B যোগ করি।

প্রমাণ : $OD \perp AB$ হওয়ায়
$\angle ODA = \angle ODB$ = এক সমকোণ।
অতএব, ΔODA ও ΔODB উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ।
এখন, ΔODA ও ΔODB সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে
অতিভুজ OA = অতিভুজ OB [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং OD = OD [সাধারণ বাহু]
$\therefore$ $\Delta ODA \cong \Delta ODB$
অতএব, AD = BD.

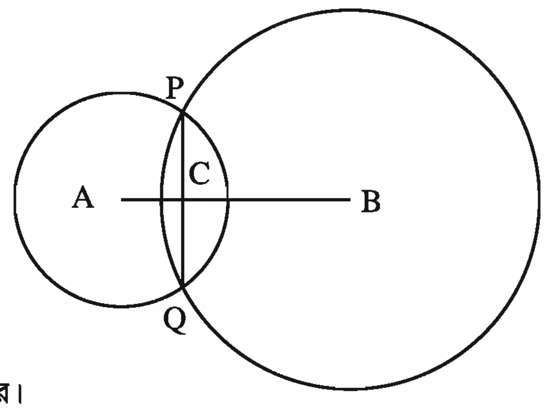
মন্তব্য : উপপাদ্য ৩৩ এবং উপপাদ্য ৩৪ পরস্পর বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

অনুসিদ্ধান্ত–১। বৃত্তের যেকোনো জ্যা এর লম্ব–দ্বিখণ্ডক কেন্দ্রগামী।

অনুসিদ্ধান্ত–২। যেকোনো সরলরেখা একটি বৃত্তকে দুইয়ের অধিক বিন্দুতে ছেদ করতে পারে না।

অনুসিদ্ধান্ত–৩। দুইটি পরস্পরচ্ছেদী বৃত্তের কেন্দ্রদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশ তাদের সাধারণ জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

ইঙ্গিত : A ও B কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং PQ জ্যা এর মধ্যবিন্দু C।
A, C এবং B, C যোগ করা হয়েছে।
A বৃত্তের কেন্দ্র এবং C, PQ জ্যা এর মধ্যবিন্দু হওয়ায় $AC \perp PQ$.
সুতরাং, $\angle ACP$ = এক সমকোণ।
অনুরূপভাবে $\angle PCB$ = এক সমকোণ।
কিন্তু এরা সন্নিহিত কোণ
$\therefore$ AC ও BC একই সরলরেখায় অবস্থিত।
অতএব, AB রেখাংশ PQ জ্যাকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



অনুশীলনী–১০.১

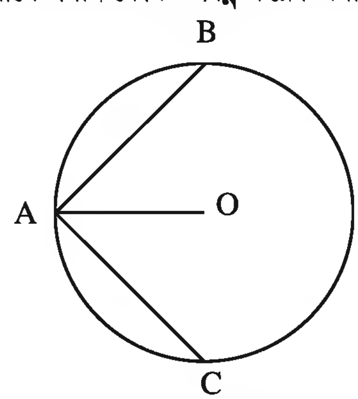
১। প্রমাণ কর যে, দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় এমন সব বৃত্তের কেন্দ্রগুলো এক সরলরেখায় অবস্থিত।

২। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা পরস্পরকে সমদ্বিখণ্ডিত করলে তাদের ছেদবিন্দু বৃত্তটির কেন্দ্র হবে।

৩। প্রমাণ কর যে, দুইটি সমান্তরাল জ্যা এর মধ্যবিন্দুর সংযোজক সরলরেখা কেন্দ্রগামী এবং জ্যাদ্বয়ের ওপর লম্ব।

৪। কোনো বৃত্তের AB ও AC জ্যা দুইটি A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের সাথে সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, $AB = AC$.

৫। চিত্রে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং জ্যা AB = জ্যা AC.
প্রমাণ কর যে, $\angle BAO = \angle CAO$.



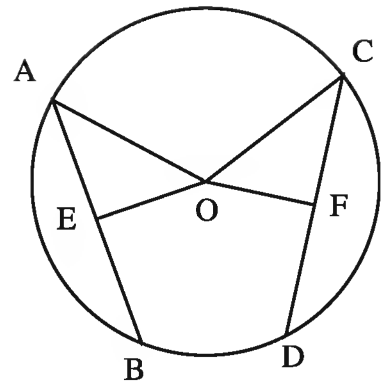
৬। কোনো বৃত্ত একটি সমকোণী ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো দিয়ে যায়। দেখাও যে, বৃত্তটির কেন্দ্র অতিভুজের মধ্যবিন্দু।

৭। দুইটি সমকেন্দ্রিক বৃত্তের একটির AB জ্যা অপর বৃত্তকে C ও D বিন্দুতে ছেদ করে।
প্রমাণ কর যে, $AC = BD$.

উপপাদ্য–৩৫

বৃত্তের সকল সমান জ্যা কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ করতে হবে যে, O থেকে AB এবং CD জ্যাদ্বয় সমদূরবর্তী।



অঙ্কন : O থেকে AB ও CD জ্যা এর ওপর যথাক্রমে OE এবং OF লম্ব রেখাংশ আঁকি। O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে এবং $OE \perp AB$ ও $OF \perp CD$.

সুতরাং, $AE = BE$ এবং $CF = DF$.

$\therefore$ $AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$.

কিন্তু $AB = CD$ [কল্পনা]

$\therefore$ $AE = CF$.

এখন ΔOAE এবং ΔOCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং $AE = CF$.

$\therefore$ $\Delta OAE \cong \Delta OCF$

$\therefore$ $OE = OF$.

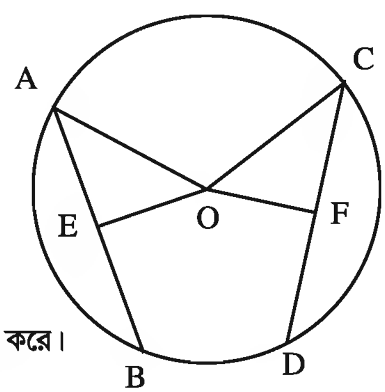
কিন্তু OE এবং OF কেন্দ্র O থেকে যথাক্রমে AB জ্যা এবং CD জ্যা এর দূরত্ব।

সুতরাং, AB এবং CD জ্যাদ্বয় বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী।

উপপাদ্য–৩৬

বৃত্তের কেন্দ্র থেকে সমদূরবর্তী সকল জ্যা পরস্পর সমান।

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং AB ও CD দুইটি জ্যা। O থেকে AB ও CD এর ওপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব। তাহলে OE ও OF কেন্দ্র থেকে যথাক্রমে AB ও CD জ্যায়ের দূরত্ব নির্দেশ করে। $OE = OF$ হলে প্রমাণ করতে হবে যে, $AB = CD$.



অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$.

সুতরাং, $\angle OEA = \angle OFC =$ এক সমকোণ

এখন, ΔOAE এবং ΔOCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে

অতিভুজ $OA =$ অতিভুজ OC [উভয়ে একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এবং $OE = OF$ [কল্পনা]

$\therefore$ $\Delta OAE \cong \Delta OCF$.

$\therefore$ $AE = CF$.

কেন্দ্র থেকে ব্যাস ভিন্ন যেকোনো জ্যা এর ওপর অঙ্কিত লম্ব জ্যাকে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

$\therefore$ $AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$।

সুতরাং, $\frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}CD$

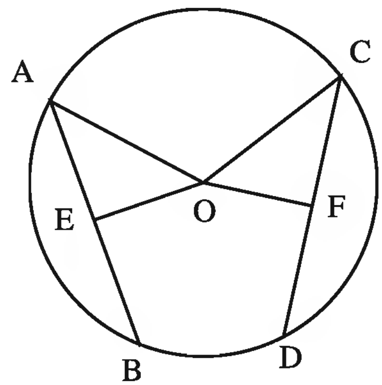
অর্থাৎ, $AB = CD$.

মন্তব্য : উপপাদ্য ৩৫ এবং উপপাদ্য ৩৬ বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

উদাহরণ ১০.১। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে কেন্দ্রের নিকটতম জ্যাটি অপর জ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB এবং CD দুইটি জ্যা। O থেকে AB ও CD এর ওপর লম্বদ্বয় যথাক্রমে OE ও OF এবং $OE < OF$। প্রমাণ করতে হবে যে, $AB > CD$.

অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।



প্রমাণ : যেহেতু $OE \perp AB$ এবং $OF \perp CD$.

সুতরাং, $AE = \frac{1}{2}AB$ এবং $CF = \frac{1}{2}CD$

এখন, ΔOAE এবং ΔOCF সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ের মধ্যে আমরা পাই,

$OA^2 = OE^2 + AE^2$ এবং $OC^2 = OF^2 + CF^2$।

কিন্তু $OA = OC$. $\therefore OA^2 = OC^2$

$\therefore$ $OE^2 + AE^2 = OF^2 + CF^2$ .....(1)

এখন $OE < OF$ হওয়ায় $OE^2 < OF^2$

সুতরাং, (1) থেকে পাওয়া যায়, $AE^2 > CF^2$

$\therefore$ $AE > CF$ বা, $\frac{1}{2}AB > \frac{1}{2}CD$।

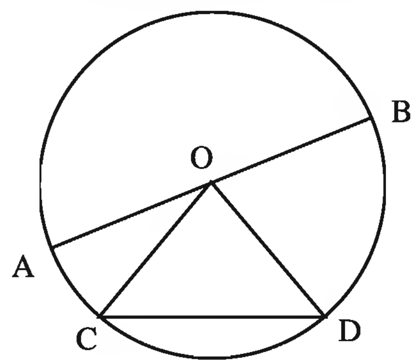
সুতরাং, $AB > CD$।

উদাহরণ ১০.২। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের ব্যাসই বৃহত্তম জ্যা।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABDC একটি বৃত্ত। AB তার ব্যাস এবং CD ব্যাস ভিন্ন যেকোনো একটি জ্যা।

প্রমাণ করতে হবে যে, $AB > CD$.

অঙ্কন : O, C এবং O, D যোগ করি।



প্রমাণ : $OA = OB = OC = OD$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

এখন, ΔOCD এ, $OC + OD > CD$

বা, $OA + OB > CD$

অর্থাৎ, $AB > CD$.

অনুশীলনী–১০.২

১। বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা পরস্পরকে ছেদ করলে দেখাও যে, তাদের একটির অংশদ্বয় অপরটির অংশদ্বয়ের সমান।

২। প্রমাণ কর যে, বৃত্তের সমান জ্যা এর মধ্যবিন্দুগুলো সমবৃত্ত।

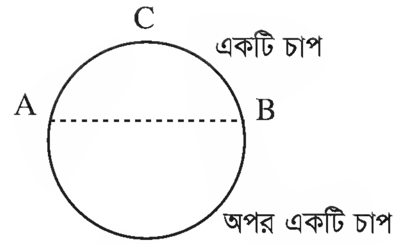
৩। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান জ্যা অঙ্কন করলে তারা সমান্তরাল হয়।

৪। দেখাও যে, ব্যাসের দুই প্রান্ত থেকে তার বিপরীত দিকে দুইটি সমান্তরাল জ্যা আঁকলে তারা সমান হয়।

৫। দেখাও যে, বৃত্তের দুইটি জ্যা এর মধ্যে বৃহত্তর জ্যা–টি ক্ষুদ্রতর জ্যা অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটতর।

৬। কোনো বৃত্তের AB একটি নির্দিষ্ট জ্যা এবং CD অন্য যেকোনো জ্যা যার মধ্যবিন্দু E, AB জ্যা–এ অবস্থিত। দেখাও যে, E যতই AB এর মধ্যবিন্দুর নিকটবর্তী হয়, CD এর দৈর্ঘ্য ততই বর্ধিত হয়।

১০.৩। বৃত্তচাপ

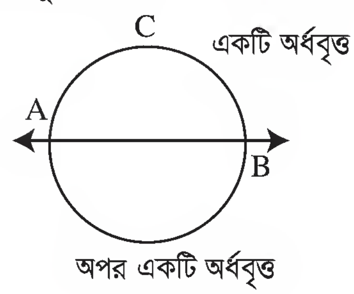


সংজ্ঞা : কোনো বৃত্তে A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু হলে A, B এবং $\overleftrightarrow{AB}$ এর এক পার্শ্বে অবস্থিত বৃত্তের বিন্দুসমূহের সেটকে বৃত্তটির একটি চাপ বলা হয়। A ও B এই চাপের প্রান্ত বিন্দু এবং চাপের অন্য সকল বিন্দু তার অন্তঃস্থ বিন্দু। চাপের অন্তঃস্থ একটি বিন্দু C নির্দিষ্ট করে চাপটিকে ACB চাপ বলে অভিহিত করা হয় এবং $\overset{\frown}{ACB}$ প্রতীক দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

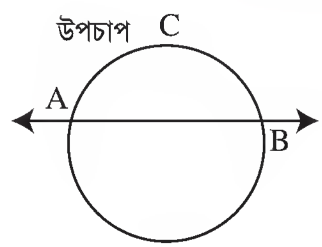
মন্তব্য : বৃত্তের চাপ বৃত্তটির একটি উপসেট। বৃত্তের দুইটি বিন্দু A ও B বৃত্তটিকে দুইটি চাপে বিভক্ত করে। উভয় চাপের প্রান্তবিন্দু A ও B এবং প্রান্তবিন্দু ছাড়া চাপ দুইটির অন্য কোনো সাধারণ বিন্দু নাই।

সংজ্ঞা : কোন বৃত্তে $\overset{\frown}{ACB}$ কে একটি

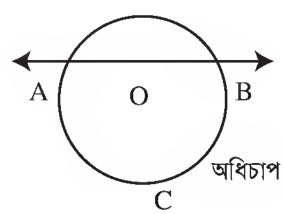
(ক) অর্ধবৃত্ত বলা হয় যদি $\overleftrightarrow{AB}$ কেন্দ্র দিয়ে যায়,



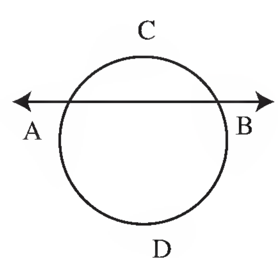
(খ) উপচাপ বলা হয় যদি চাপটির অন্তঃস্থ বিন্দুসমূহ $\overleftrightarrow{AB}$ এর যে পার্শ্বে বৃত্তের কেন্দ্র অবস্থিত তার বিপরীত পার্শ্বে থাকে,



(গ) অধিচাপ বলা হয় যদি চাপটির অন্তঃস্থ বিন্দুসমূহ ও বৃত্তের কেন্দ্র $\overleftrightarrow{AB}$ এর একই পার্শ্বে থাকে।



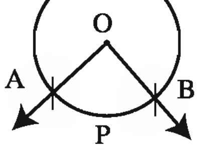
সংজ্ঞা : কোনো বৃত্তে একই প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট $\overset{\frown}{ACB}$ ও $\overset{\frown}{ADB}$ চাপ দুইটির একটিকে অপরটির অনুবন্ধী চাপ বলা হয় যদি C ও D বিন্দু $\overleftrightarrow{AB}$ এর বিপরীত পার্শ্বে থাকে।



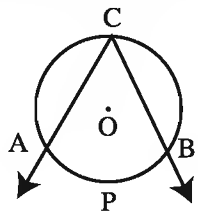
মন্তব্য : যদি $\overset{\frown}{ACB}$ উপচাপ হয়, তবে তার অনুবন্ধী $\overset{\frown}{ADB}$ অধিচাপ এবং বিপরীতক্রমে।

কোণ কর্তৃক খণ্ডিত চাপ

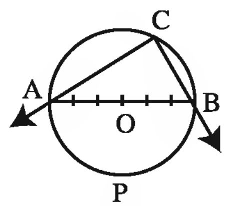
সংজ্ঞা : একটি কোণ কোনো বৃত্তে একটি চাপ খণ্ডিত বা ছিন্ন করে বলা হয় যদি (১) চাপটির প্রত্যেক প্রান্তবিন্দু কোণটির বাহুতে অবস্থিত হয়, (২) কোণটির প্রত্যেক বাহুতে চাপটির অন্তত একটি প্রান্তবিন্দু অবস্থিত হয় এবং (৩) চাপটির প্রত্যেক অন্তঃস্থবিন্দু কোণটির অভ্যন্তরে থাকে।



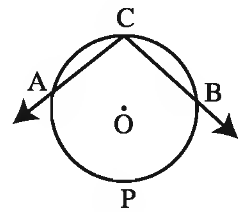
চিত্র –১



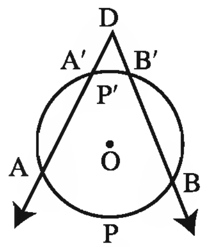
চিত্র –২



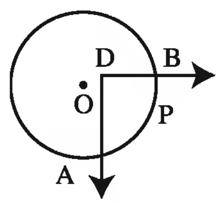
চিত্র –৩



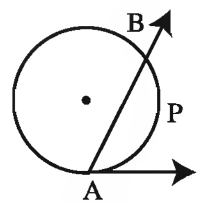
চিত্র –৪



চিত্র –৫



চিত্র –৬



চিত্র –৭

ওপরের প্রত্যেক চিত্রে প্রদর্শিত কোণটি O কেন্দ্রিক বৃত্তে $\overset{\frown}{APB}$ চাপ খণ্ডিত করে। চিত্র–৫ এর কোণটি $\overset{\frown}{A'P'B'}$ চাপও খণ্ডিত করে।

বৃত্তস্থ কোণ

সংজ্ঞা : একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের একটি বিন্দু হলে এবং কোণটির প্রত্যেক বাহুতে শীর্ষবিন্দু ছাড়াও বৃত্তের একটি বিন্দু থাকলে কোণটিকে একটি বৃত্তস্থ কোণ বা বৃত্তে অন্তর্লিখিত কোণ বলা হয়।
ওপরের চিত্র–২, চিত্র–৩, চিত্র–৪ এর কোণগুলো বৃত্তস্থ কোণ।

মন্তব্য : প্রত্যেক বৃত্তস্থ কোণ বৃত্তে একটি চাপ খণ্ডিত করে। এই চাপ উপচাপ, অর্ধবৃত্ত অথবা অধিচাপ হতে পারে।

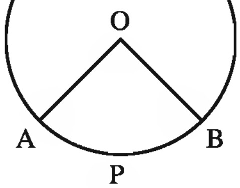
সংজ্ঞা : একটি বৃত্তস্থ কোণ বৃত্তে যে চাপ খণ্ডিত করে, কোণটি সেই চাপের ওপর দণ্ডায়মান এবং খণ্ডিত চাপের অনুবন্ধী চাপে অন্তর্লিখিত বলা হয়।
ওপরের চিত্র–২, চিত্র–৩ বা চিত্র–৪ এর কোণটি $\overset{\frown}{APB}$ চাপের ওপর দণ্ডায়মান এবং $\overset{\frown}{ACB}$ চাপে অন্তর্লিখিত। লক্ষণীয় যে, $\overset{\frown}{APB}$ ও $\overset{\frown}{ACB}$ একে অপরের অনুবন্ধী চাপ।

মন্তব্য : বৃত্তের কোনো চাপে অন্তর্লিখিত একটি কোণ হচ্ছে সেই কোণ যার শীর্ষবিন্দু ঐ চাপের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু এবং যার এক একটি বাহু ঐ চাপের এক একটি প্রান্তবিন্দু দিয়ে যায়। বৃত্তের কোনো চাপে দণ্ডায়মান একটি বৃত্তস্থ কোণ হচ্ছে ঐ চাপের অনুবন্ধী চাপে অন্তর্লিখিত একটি কোণ।

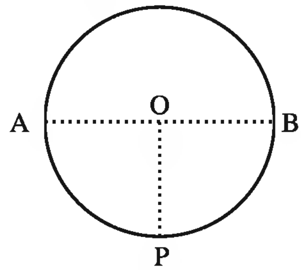
কেন্দ্রস্থ কোণ

সংজ্ঞা : একটি কোণের শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত হলে, কোণটিকে ঐ বৃত্তের একটি কেন্দ্রস্থ কোণ বলা হয় এবং কোণটি বৃত্তে যে চাপ খণ্ডিত করে সেই চাপের ওপর তা দণ্ডায়মান বলা হয়।
ওপরের চিত্র–১ এর কোণটি একটি কেন্দ্রস্থ কোণ এবং তা $\overset{\frown}{APB}$ চাপের ওপর দণ্ডায়মান।

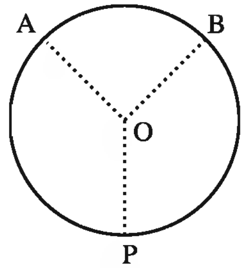
প্রত্যেক কেন্দ্রস্থ কোণ বৃত্তে একটি উপচাপ খন্ডিত করে। চিত্র – ৮ এর $\overset{\frown}{APB}$ একটি উপচাপ। বৃত্তের কোনো উপচাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বলতে এরূপ কোণকেই বোঝায় যার শীর্ষবিন্দু বৃত্তের কেন্দ্রে অবস্থিত এবং যার বাহুদ্বয় ঐ চাপের প্রান্তবিন্দু দুইটি দিয়ে যায় (চিত্র–৮)।



চিত্র – ৮



চিত্র – ৯



চিত্র – ১০

অর্ধবৃত্ত ও অধিচাপের ওপর দন্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ বিবেচনার জন্য ওপরে উল্লিখিত বর্ণনা অর্থবহ নয়। তবে এরূপ $\overset{\frown}{APB}$ চাপের একটি অন্তঃস্থ বিন্দু P নিয়ে $\overset{\frown}{AP}$ ও $\overset{\frown}{PB}$ চাপের ওপর দণ্ডায়মান যথাক্রমে $\angle AOP$ ও $\angle POB$ বিবেচনা করা যায় (চিত্র–৯ ও চিত্র–১০)।

অর্ধবৃত্তের ক্ষেত্রে (চিত্র–৯ এ) $\angle AOP + \angle POB =$ সরলকোণ AOB

এবং অধিচাপের ক্ষেত্রে (চিত্র–১০ এ) $\angle AOP + \angle POB =$ প্রবৃদ্ধকোণ AOB।

এরূপ সরলকোণ ও প্রবৃদ্ধকোণকেই যথাক্রমে অর্ধবৃত্ত ও অধিচাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ ধরা হয়।

চাপের ডিগ্রি পরিমাপ

অনেক সময় বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণের ডিগ্রি পরিমাপের সাহায্যে চাপের পরিমাপ বর্ণনা করা হয়।

সংজ্ঞা : বৃত্তস্থ কোনো চাপের ডিগ্রি পরিমাপ নিম্নরূপ :

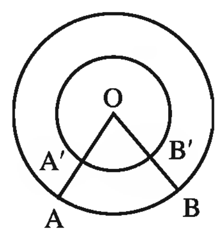
(ক) চাপটি উপচাপ হলে, তার ডিগ্রি পরিমাপ ঐ চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণের ডিগ্রি পরিমাপ।

(খ) চাপটি অর্ধবৃত্ত হলে, তার ডিগ্রি পরিমাপ 180।

(গ) চাপটি অধিচাপ হলে, তার ডিগ্রি পরিমাপ $360 - d$, যেখানে d ঐ চাপের অনুবন্ধী চাপের ডিগ্রি পরিমাপ।

উল্লেখ্য যে, পরস্পরচ্ছেদী দুইটি সরলরেখা ছেদ বিন্দুতে যে চারটি কোণ উৎপন্ন করে তাদের ডিগ্রি পরিমাপের সমষ্টি 360। কেন্দ্রস্থ কোণের সম্প্রসারিত ধারণা ব্যবহার করে বলা যায় :
কোনো চাপের ডিগ্রি পরিমাপ = ঐ চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণের ডিগ্রি পরিমাপ।

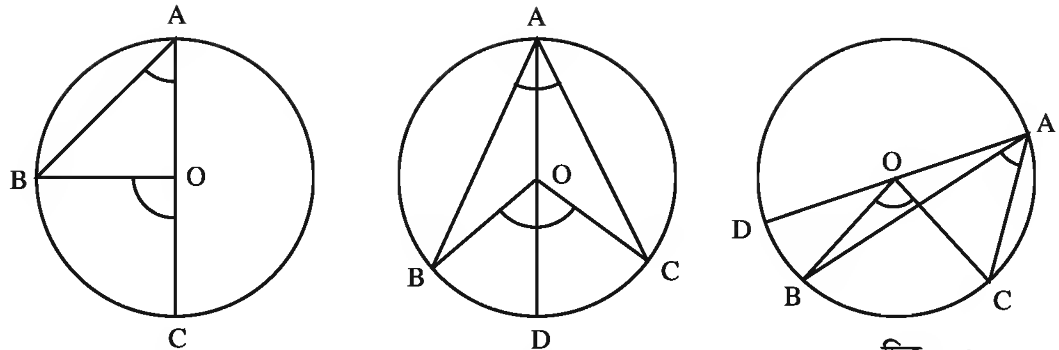
মন্তব্য : কোনো চাপের ডিগ্রি পরিমাপ চাপটির দৈর্ঘ্য নির্দেশ করে না।
পাশের চিত্রে, O কেন্দ্রিক বৃত্ত দুইটিতে AB চাপ ও A′B′ চাপের ডিগ্রি পরিমাপ একই, কিন্তু তাদের দৈর্ঘ্য যে এক নয় তা চিত্র থেকে সুস্পষ্ট।



উপপাদ্য–৩৭

বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC একটি বৃত্ত এবং তার একই চাপ BC এর ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAC$ এবং কেন্দ্রস্থ $\angle BOC$।



চিত্র – ১ চিত্র – ২ চিত্র – ৩

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$

প্রমাণ : (১) প্রথমে মনে করি, AC রেখাংশ কেন্দ্র দিয়ে যায় (চিত্র–১)

এ ক্ষেত্রে ΔAOB এ

$OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]

$\therefore \angle OAB = \angle OBA$

কিন্তু ΔAOB এর

বহিঃস্থ $\angle BOC = \angle OAB + \angle OBA$

$= \angle OAB + \angle OAB$

$= 2\angle OAB$

$\therefore \angle OAB = \frac{1}{2} \angle BOC$

অর্থাৎ $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$

(২) এখন মনে করি, AC রেখাংশ কেন্দ্রগামী নয় (চিত্র–২ ও চিত্র–৩)। এ ক্ষেত্রে A বিন্দু দিয়ে ব্যাস AD আঁকি।

এখন, CD চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle CAD$ এর AD বাহু কেন্দ্রগামী। সুতরাং (১) অনুযায়ী

$\angle CAD = \frac{1}{2} \angle COD$

আবার, BD চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ $\angle BAD$ এর AD বাহু কেন্দ্রগামী। সুতরাং (১) অনুযায়ী

$\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD$

এখন, চিত্র–২ এ (যেখানে B ও C বিন্দু AD রেখাংশের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত)

$\angle CAD + \angle BAD = \frac{1}{2} (\angle COD + \angle BOD)$

বা, $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$।

আবার, চিত্র–৩ এ (যেখানে B ও C বিন্দু AD রেখাংশের একই পার্শ্বে অবস্থিত

$\angle CAD - \angle BAD = \frac{1}{2} (\angle COD - \angle BOD)$

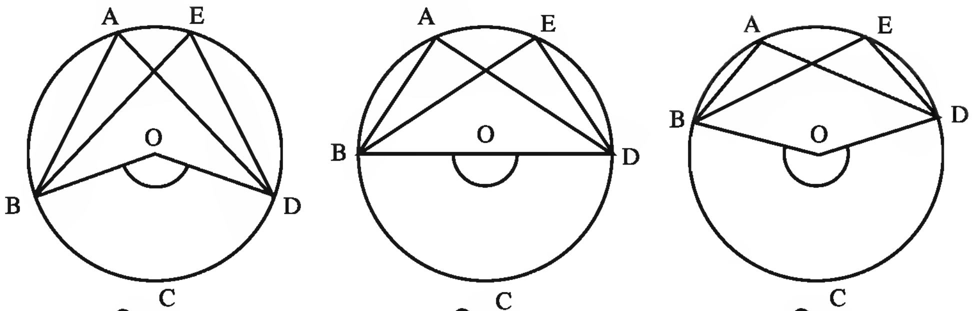
বা, $\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$।

$\therefore$ সকল ক্ষেত্রেই

$\angle BAC = \frac{1}{2} \angle BOC$.

উপপাদ্য–৩৮

বৃত্তের একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।



চিত্র – ১ চিত্র – ২ চিত্র – ৩

মনে করি, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং বৃত্তের BCD চাপের ওপর দণ্ডায়মান $\angle BAD$ ও $\angle BED$ দুইটি বৃত্তস্থ কোণ।

প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle BAD = \angle BED$

অঙ্কন : O, B এবং O, D যোগ করি।

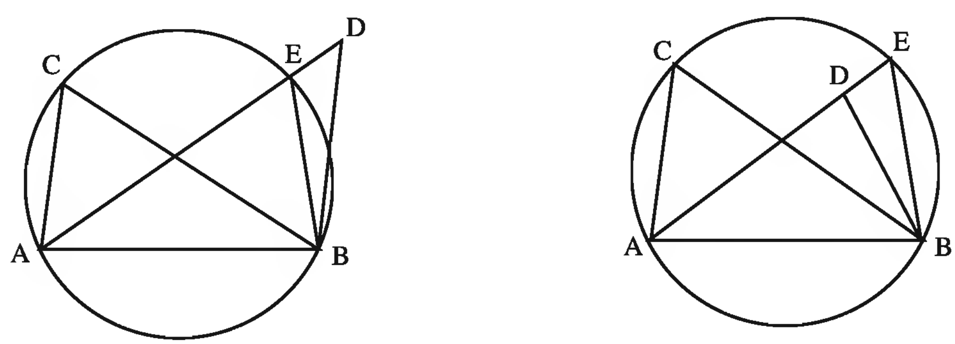
প্রমাণ : এখানে BCD চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণ $\angle BOD$।
যেহেতু একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক,

সুতরাং, $\angle BAD = \frac{1}{2} \angle BOD$ এবং $\angle BED = \frac{1}{2} \angle BOD$

$\therefore \quad \angle BAD = \angle BED.$

উপপাদ্য–৩৯

দুইটি বিন্দুর সংযোজক রেখাংশ তার একই পাশে অপর দুই বিন্দুতে সমান কোণ উৎপন্ন করলে, বিন্দু চারটি সমবৃত্ত হবে।



চিত্র – ১ চিত্র – ২

মনে করি, A ও B দুইটি ভিন্ন বিন্দু এবং AB রেখাংশের একই পাশে অবস্থিত C ও D বিন্দুতে উৎপন্ন $\angle ACB$ ও $\angle ADB$ সমান অর্থাৎ $\angle ACB = \angle ADB$.

প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, D, C বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

অঙ্কন : A, B, C বিন্দু তিনটি দিয়ে একটি বৃত্ত অঙ্কন করি। মনে করি, বৃত্তটি AD রেখাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। E, B যোগ করি।

প্রমাণ : অঙ্কন অনুসারে A, B, E, C বিন্দু চারটি সমবৃত্ত। $\therefore \angle ACB = \angle AEB$. [একই চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ]

কিন্তু $\angle ACB = \angle ADB$ [দেওয়া আছে]

$\therefore \angle AEB = \angle ADB.$

কিন্তু তা অসম্ভব। কারণ, চিত্র–১–এ, ΔBED এর বহিঃস্থ $\angle AEB >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle ADB$ এবং চিত্র–২–এ, ΔBED এর বহিঃস্থ $\angle ADB >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle AEB$.

সুতরাং, E এবং D বিন্দুদ্বয় ভিন্ন হতে পারে না; E বিন্দু অবশ্যই D বিন্দুর সাথে মিলে যাবে।

অতএব, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

অনুসিদ্ধান্ত : একই ভূমির ওপর এবং তার একই পাশে অবস্থিত সমান শিরঃকোণবিশিষ্ট ত্রিভুজগুলোর শীর্ষবিন্দুসমূহ সমবৃত্ত হবে।

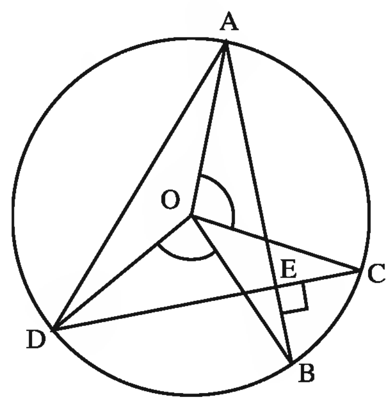
মন্তব্য : উপপাদ্য–৩৮ ও উপপাদ্য–৩৯ বিপরীত প্রতিজ্ঞা।

অনুশীলনী–১০.৩

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে ABCD একটি অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ। AC, BD কর্ণদ্বয় E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AOB + \angle COD = 2\angle AEB$.

২। ABCD বৃত্তে AB ও CD জ্যা দুইটি পরস্পর E বিন্দুতে ছেদ করেছে। দেখাও যে, ΔAED ও ΔBEC সদৃশকোণী।

৩। চিত্রে, জ্যা AB $\perp$ জ্যা CD. AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যথাক্রমে $\angle AOC$ ও $\angle BOD$ উৎপন্ন করেছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOC + \angle BOD =$ দুই সমকোণ।



[**ইঙ্গিত :** A, D যোগ করি।

$\angle AOC + \angle BOD = 2(\angle ADC + \angle BAD)$

এখন $\angle ADC + \angle BAD =$ এক সমকোণ

যেহেতু ΔADE এ $\angle AED =$ এক সমকোণ।

$\therefore \angle AOC + \angle BOD =$ দুই সমকোণ।]

৪। O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD বৃত্তে $\angle ADB + \angle BDC =$ এক সমকোণ। প্রমাণ কর যে, A, O এবং C এক সরলরেখায় অবস্থিত।

৫। AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের অভ্যন্তরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাদের সমষ্টি $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ।

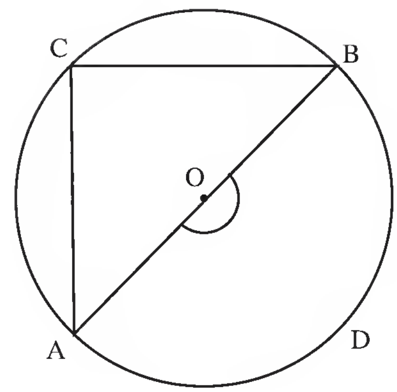
৬। AB ও CD দুইটি জ্যা বৃত্তের বাইরে E বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ উৎপন্ন করে, তাদের অন্তর $\angle AEC$ এর দ্বিগুণ।

৭। দেখাও যে, বৃত্তস্থ ট্রাপিজিয়ামের তির্যক বাহুদ্বয় পরস্পর সমান।

৮। AB ও AC কোনো বৃত্তের দুইটি জ্যা এবং P ও Q যথাক্রমে তাদের দ্বারা ছিন্ন উপচাপ দুইটির মধ্যবিন্দু। PQ জ্যা AB ও AC জ্যাকে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে। দেখাও যে, AD = AE.

উপপাদ্য–৪০

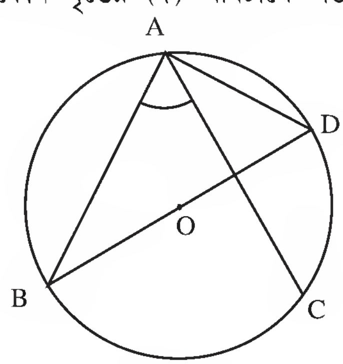
অর্ধবৃত্তস্থ কোণ এক সমকোণ।



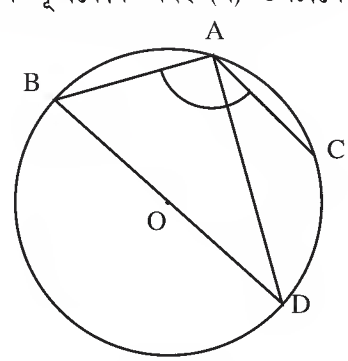
মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে AB একটি ব্যাস এবং $\angle ACB$ একটি অর্ধবৃত্তস্থ কোণ।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ACB$ = এক সমকোণ।
অঙ্কন : AB এর যে পাশে C বিন্দু অবস্থিত, তার বিপরীত পাশে বৃত্তের ওপর একটি বিন্দু D নিই।

প্রমাণ : ADB চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ
$\angle ACB = \frac{1}{2}$(কেন্দ্রস্থ সরল কোণ $\angle AOB$)।
কিন্তু সরলকোণ $\angle AOB$ = দুই সমকোণ।
$\therefore \angle ACB = \frac{1}{2}$ (দুই সমকোণ) = এক সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। কোন বৃত্তের (ক) অধিচাপে অন্তর্লিখিত কোণ সূক্ষ্মকোণ এবং (খ) উপচাপে অন্তর্লিখিত কোণ স্থূলকোণ।



চিত্র–১



চিত্র–২

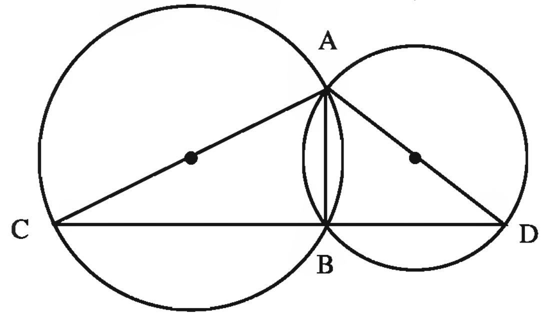
মনে করি, O কেন্দ্রিক বৃত্তের BAC চাপটি চিত্র–১ এ একটি অধিচাপ এবং চিত্র–২ এ একটি উপচাপ।
প্রমাণ করতে হবে যে,
(ক) চিত্র–১ এ $\angle BAC$ সূক্ষ্মকোণ
এবং (খ) চিত্র–২ এ $\angle BAC$ স্থূলকোণ।

অঙ্কন : BD ব্যাস আঁকি।

প্রমাণ : উভয় চিত্রে, $\angle BAD$ অর্ধবৃত্তাংশস্থ কোণ।
সুতরাং, $\angle BAD$ = এক সমকোণ।
চিত্র–১ এ A ও C বিন্দু BD রেখাংশের বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত।
সুতরাং, $\angle BAC < \angle BAD$
$\therefore \angle BAC <$ এক সমকোণ
অর্থাৎ, $\angle BAC$ সূক্ষ্মকোণ।
(খ) চিত্র–২ এ A ও C বিন্দু BD রেখাংশের একই পার্শ্বে অবস্থিত।
সুতরাং $\angle BAC > \angle BAD$
$\therefore \angle BAC >$ এক সমকোণ
অর্থাৎ, $\angle BAC$ স্থূলকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ২। সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজকে ব্যাস ধরে বৃত্ত অঙ্কন করলে তা সমকৌণিক শীর্ষবিন্দু দিয়ে যাবে।

উদাহরণ ১। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করে। AC ও AD বৃত্তদ্বয়ের ব্যাস হলে, দেখাও যে, C, B, D বিন্দু তিনটি সমরেখ হবে।



[**ইঙ্গিত :** যেহেতু AC ও AD ব্যাস, অতএব অর্ধবৃত্তস্থ $\angle ABC$ ও $\angle ABD$ প্রত্যেকে এক সমকোণ।
$\therefore \angle CBD$ = এক সরলকোণ।
অর্থাৎ, C, B, D বিন্দু তিনটি সমরেখ।]

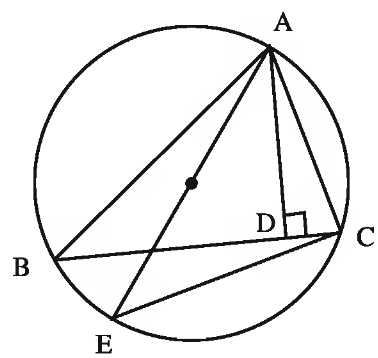
অনুশীলনী–১০.৪

১। প্রমাণ কর যে, সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান বাহুদ্বয়কে ব্যাস ধরে দুইটি বৃত্ত অঙ্কন করলে, তারা ভূমির মধ্যবিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করবে।

২। প্রমাণ কর যে, সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজের মধ্যবিন্দু ও বিপরীত শীর্ষের সংযোজক রেখাংশ অতিভুজের অর্ধেক।

৩। প্রমাণ কর যে, ΔABC এর শীর্ষবিন্দু দিয়ে অঙ্কিত বৃত্তের AB চাপ, BC চাপ ও CA চাপের প্রত্যেকটিতে অবস্থিত একটি করে তিনটি কোণের সমষ্টি চার সমকোণের সমান।

৪। দেওয়া আছে : $AD \perp BC$ এবং AE বৃত্তের ব্যাস ।
প্রমাণ কর যে, $\angle BAD = \angle EAC$.

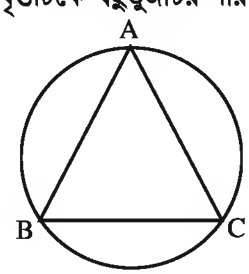


[**ইঙ্গিত :** $\angle ACE$ = এক সমকোণ, যেহেতু AE ব্যাস।
$\therefore \angle EAC + \angle AEC$ = এক সমকোণ।
আবার, $\angle ABD + \angle BAD$ = এক সমকোণ।
যেহেতু $\angle ADB$ = এক সমকোণ।
কিন্তু $\angle ABD = \angle AEC$, যেহেতু একই চাপ AC এর ওপর বৃত্তস্থ কোণ।
$\therefore \angle BAD = \angle EAC$]

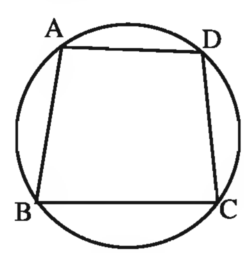
৫। ABC একটি ত্রিভুজ। AB কে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত যদি BC বাহুকে D বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, AC বাহুকে ব্যাস নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তও D বিন্দু দিয়ে যাবে।

বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ

সংজ্ঞা : কোনো বহুভুজের শীর্ষবিন্দুগুলো একটি বৃত্তে অবস্থিত হলে বহুভুজটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত হয়েছে বলা হয়। সে ক্ষেত্রে, বৃত্তটিকে বহুভুজটির পরিবৃত্ত বলা হয় এবং বহুভুজটিকে ঐ বৃত্তে বৃত্তস্থ বহুভুজ বলে।



চিত্র–১



চিত্র–২

চিত্র–১ এ ABC ত্রিভুজ এবং চিত্র–২ এ ABCD চতুর্ভুজ বৃত্তে অন্তর্লিখিত হয়েছে।

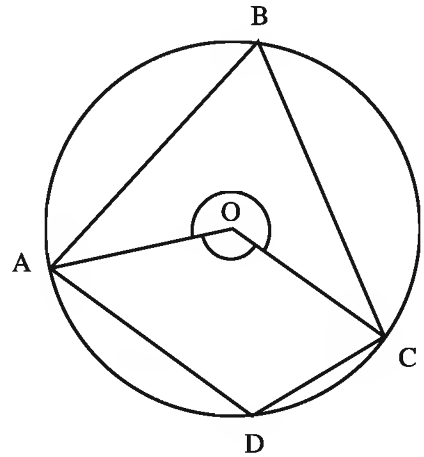
উল্লেখ্য যে, সমরেখ নয় এমন তিনটি ভিন্ন বিন্দু দিয়ে সব সময় একটি বৃত্ত অঙ্কন করা যায়। সুতরাং প্রত্যেক ত্রিভুজকে একটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত করা যায়। কিন্তু ত্রিভুজ ব্যতীত অন্য ধরনের প্রত্যেক বহুভুজকে কোনো বৃত্তে অন্তর্লিখিত করা যায় না।

বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজ সংক্রান্ত উপপাদ্য

উপপাদ্য–৪১

বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে ABCD চতুর্ভুজটি অন্তর্লিখিত হয়েছে।
প্রমাণ করতে হবে যে, $\angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ
এবং $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।



অঙ্কন : O, A এবং O, C যোগ করি।

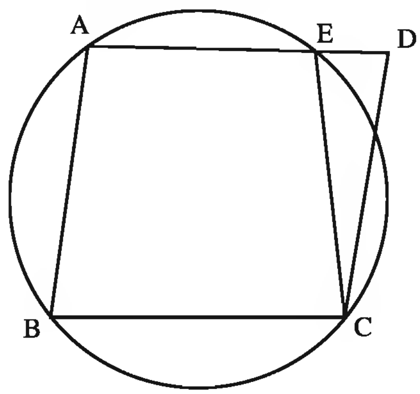
প্রমাণ : একই চাপ ADC এর ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ
$\angle AOC = 2$ (বৃত্তস্থ $\angle ABC$)
অর্থাৎ, $\angle AOC = 2\angle ABC$
আবার, একই চাপ ABC এর উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ
প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2$(বৃত্তস্থ $\angle ADC$)
অর্থাৎ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2\ \angle ADC$
$\therefore\ \angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC = 2(\angle ABC + \angle ADC)$
কিন্তু $\angle AOC +$ প্রবৃদ্ধ কোণ $\angle AOC =$ চার সমকোণ
$\therefore\ 2(\angle ABC + \angle ADC) =$ চার সমকোণ
$\therefore\ \angle ABC + \angle ADC =$ দুই সমকোণ।
একইভাবে, প্রমাণ করা যায় যে, $\angle BAD + \angle BCD =$ দুই সমকোণ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। বৃত্তে অন্তর্লিখিত চতুর্ভুজের একটি বাহু বর্ধিত করলে যে বহিঃস্থ কোণ উৎপন্ন হয় তা বিপরীত অন্তঃস্থ কোণের সমান।

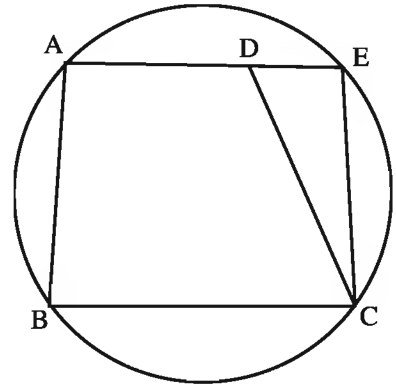
অনুসিদ্ধান্ত ২। বৃত্তে অন্তর্লিখিত সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র।

উপপাদ্য–৪২

কোনো চতুর্ভুজের দুইটি বিপরীত কোণ সম্পূরক হলে তার শীর্ষবিন্দু চারটি সমবৃত্ত হয়।



চিত্র – ১



চিত্র – ২

মনে করি, ABCD চতুর্ভুজে $\angle ABC + \angle ADC$ = দুই সমকোণ।

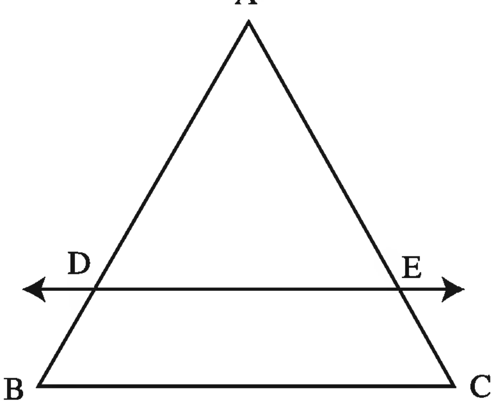
প্রমাণ করতে হবে যে, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

অঙ্কন : যেহেতু A, B, C বিন্দু তিনটি সমরেখ নয়, সুতরাং বিন্দু তিনটি দিয়ে যায় এরূপ একটি ও কেবল একটি বৃত্ত আছে। মনে করি, বৃত্তটি AD রেখাংশকে E বিন্দুতে ছেদ করে। C, E যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু অঙ্কন অনুসারে ABCE বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ,
সুতরাং $\angle ABC + \angle AEC$ = দুই সমকোণ
কিন্তু $\angle ABC + \angle ADC$ = দুই সমকোণ [দেওয়া আছে]
$\therefore \angle AEC = \angle ADC$
কিন্তু তা অসম্ভব। কারণ, চিত্র–১ এ ΔCED এর বহিঃস্থ $\angle AEC >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle EDC$ বা $\angle ADC$ এবং চিত্র–২ এ Δ CED এর বহিঃস্থ $\angle ADC >$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle DEC$.
সুতরাং E এবং D বিন্দুদ্বয় ভিন্ন হতে পারে না।
E বিন্দু অবশ্যই D বিন্দুর সাথে মিলে যাবে।
অতএব, A, B, C, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

উদাহরণ ১। ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি BC এর সমান্তরাল যেকোনো রেখা AB ও AC কে যথাক্রমে D ও E বিন্দুতে ছেদ করে।

দেখাও যে, B, C, E, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।
যেহেতু, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ,
সেহেতু, $\angle ABC = \angle ACB$
আবার DE || BC এবং AC তাদের ছেদক বলে,
$\angle DEC + \angle ECB$ = দুই সমকোণ।
$\therefore \angle DEC + \angle DBC$ = দুই সমকোণ।
অতএব, B, C, E, D বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।



অনুশীলনী–১০.৫

১। ΔABC এ $\angle B$ ও $\angle C$ এর সমদ্বিখণ্ডকদ্বয় P বিন্দুতে এবং বহির্দ্বিখণ্ডকদ্বয় Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, B, P, C, Q বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

২। প্রমাণ কর যে, বৃত্তস্থ চতুর্ভুজের যেকোনো কোণের সমদ্বিখণ্ডক ও তার বিপরীত কোণের বহির্দ্বিখণ্ডক বৃত্তের ওপর ছেদ করে।

৩। ABCD একটি বৃত্ত। $\angle CAB$ ও $\angle CBA$ এর সমদ্বিখণ্ডক দুইটি P বিন্দুতে এবং $\angle DBA$ ও $\angle DAB$ কোণদ্বয়ের সমদ্বিখণ্ডক দুইটি Q বিন্দুতে মিলিত হলে, প্রমাণ কর যে, A, Q, P, B বিন্দু চারটি সমবৃত্ত।

৪। O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে সমকোণে মিলিত হয়েছে। প্রমাণ কর যে, $\angle AOD + \angle BOC$ = দুই সমকোণ।

৫। সমান সমান ভূমির ওপর অবস্থিত যেকোনো দুইটি ত্রিভুজের শিরঃকোণদ্বয় সম্পূরক হলে, প্রমাণ কর যে, তাদের পরিবৃত্তদ্বয় সমান হবে।

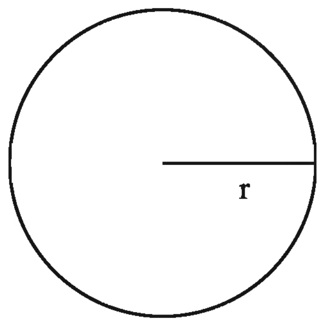
৬। ABCD চতুর্ভুজের বিপরীত কোণদ্বয় পরস্পর সম্পূরক। AC রেখা যদি $\angle BAD$ এর সমদ্বিখণ্ডক হয়, তবে প্রমাণ কর যে, BC = CD।

বৃত্তের ও বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য

এ পর্যায়ে আমরা স্বীকার করে নিই যে–

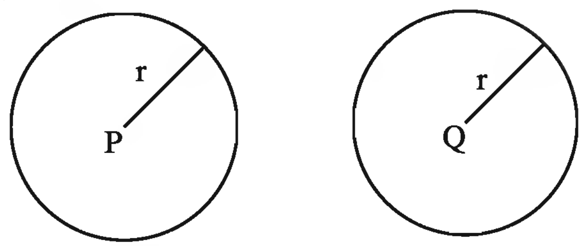
সূত্র (ক)। প্রত্যেক বৃত্তের নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য রয়েছে এবং এই দৈর্ঘ্য বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্যের আনুপাতিক।
সূত্র (খ)। যে বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য এক একক সেই বৃত্তের দৈর্ঘ্য $= \pi$ একক,
যেখানে, $\pi = 3{\cdot}1415926535897932$ .... একটি অমূলদ সংখ্যা।
বিভিন্ন হিসাবে নির্দিষ্ট দশমিক ঘর পর্যন্ত π এর আসন্ন মান ব্যবহার করা হয়।

সংজ্ঞা : বৃত্তের দৈর্ঘ্যকে তার পরিধি বলা হয়।
সূত্র (গ)। কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে,
তার পরিধি $c = 2\pi r$
প্রমাণ : বৃত্তের ব্যাসের দৈর্ঘ্য $d = 2r$
সূত্র (ক) থেকে বলা যায় $c = kd$
যেখানে, k একটি ধ্রুবক।
কিন্তু সূত্র (খ) থেকে দেখা যায় যে, $\pi = k$
$\therefore\ c = \pi d = \pi(2r) = 2\pi r$।



সংজ্ঞা : যে সকল বৃত্তের ব্যাসার্ধ সমান, তাদের সমান বৃত্ত বলা হয়।

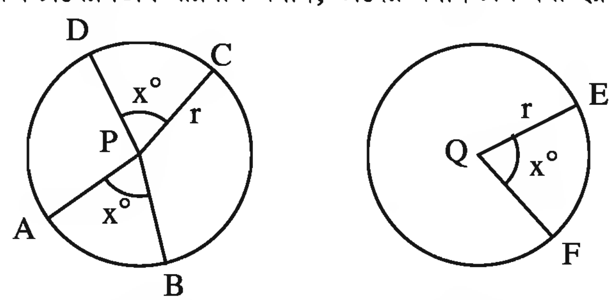
পাশের চিত্রে, P কেন্দ্রিক ও Q কেন্দ্রিক বৃত্ত দুইটির প্রত্যেকের ব্যাসার্ধ r। তারা সমান বৃত্ত। উভয় বৃত্তের দৈর্ঘ্য $c = 2\pi r$.



মন্তব্য। সকল সমান বৃত্তের দৈর্ঘ্য সমান।

সংজ্ঞা : একই বৃত্তের অথবা সমান সমান বৃত্তের যে সকল চাপের ডিগ্রি পরিমাপ সমান, তাদের সমান চাপ বলা হয়।

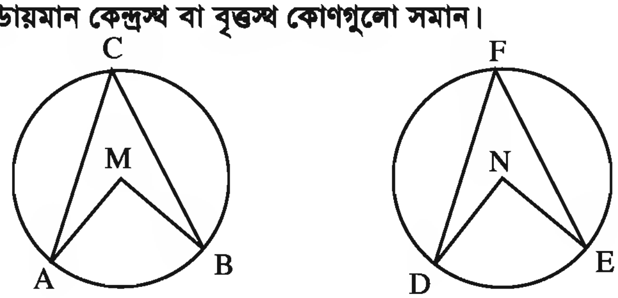
পাশের চিত্রে, P কেন্দ্রিক বৃত্তের AB চাপ ও CD চাপ এবং Q কেন্দ্রিক বৃত্তের EF চাপ সমান। কারণ, উভয় বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং প্রত্যেক চাপের ডিগ্রি পরিমাপ x.



মন্তব্য। কোনো বৃত্তের প্রত্যেক অর্ধবৃত্তের ডিগ্রি পরিমাপ 180. সুতরাং সমান সমান বৃত্তের সকল অর্ধবৃত্ত সমান।

উপপাদ্য–৪৩

সমান সমান বৃত্তচাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ বা বৃত্তস্থ কোণগুলো সমান।



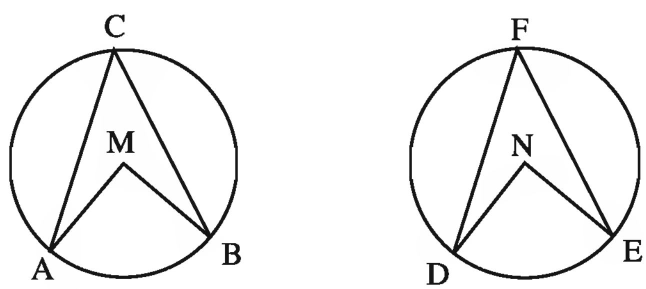
মনে করি, M কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের AB চাপ এবং N কেন্দ্রবিশিষ্ট DEF বৃত্তের DE চাপ সমান।

মনে করি, AB ও DE চাপ দুইটির ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle AMB$ ও $\angle DNE$ এবং বৃত্তস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle ACB$ ও $\angle DFE$।
প্রমাণ করতে হবে যে,
(১) $\angle AMB = \angle DNE$ এবং
(২) $\angle ACB = \angle DFE$।

প্রমাণ : যেহেতু চাপ AB = চাপ DE,
সুতরাং বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধ সমান এবং চাপ দুইটির ডিগ্রি পরিমাপ সমান।
কিন্তু সংজ্ঞানুসারে,
AB চাপের ডিগ্রি পরিমাপ = কেন্দ্রস্থ $\angle AMB$ এর ডিগ্রি পরিমাপ
এবং DE চাপের ডিগ্রি পরিমাপ = কেন্দ্রস্থ $\angle DNE$ এর ডিগ্রি পরিমাপ
$\therefore$ $\angle AMB$ এর ডিগ্রি পরিমাপ = $\angle DNE$ এর ডিগ্রি পরিমাপ
$\therefore \angle AMB = \angle DNE$ .... (১)
যেহেতু কোনো চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক,
সুতরাং $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB$ এবং । $\angle DFE = \frac{1}{2}\angle DNE$
কিন্তু (১) থেকে, $\frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2}\angle DNE$
$\therefore \angle ACB = \angle DFE.$

উপপাদ্য–৪৪

সমান বৃত্তসমূহে যে সকল চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ বা বৃত্তস্থ কোণগুলো সমান, সে সকল চাপ সমান।

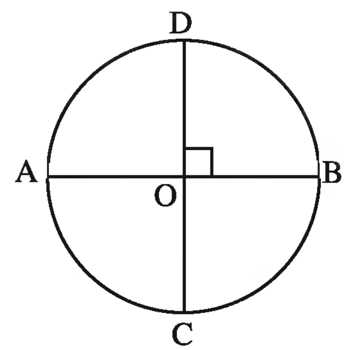


মনে করি, M ও N কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC ও DEF বৃত্ত দুইটি সমান।
মনে করি, AB ও DE চাপদ্বয়ের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle AMB$ ও $\angle DNE$ এবং বৃত্তস্থ কোণদ্বয় যথাক্রমে $\angle ACB$ ও $\angle DFE$,
যেখানে, $\angle AMB = \angle DNE$ ....(১)
অথবা, $\angle ACB = \angle DFE$ .... (২)
প্রমাণ করতে হবে যে, চাপ AB = চাপ DE।

প্রমাণ : যেহেতু কোনো চাপের ওপর দণ্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ কেন্দ্রস্থ কোণের অর্ধেক,
সুতরাং $\angle ACB = \frac{1}{2}\angle AMB$
এবং $\angle DFE = \frac{1}{2}\angle DNE$

অতএব, যদি (২) সত্য হয় অর্থাৎ $\angle ACB = \angle DFE$ হয়, তবে $\frac{1}{2}\angle AMB = \frac{1}{2}\angle DNE$
অর্থাৎ, $\angle AMB = \angle DNE$
অর্থাৎ, (১) সত্য হয়।
সুতরাং, উভয় ক্ষেত্রে $\angle AMB = \angle DNE$
অর্থাৎ, $\angle AMB$ এর ডিগ্রি পরিমাপ = $\angle DNE$ এর ডিগ্রি পরিমাপ।
$\therefore$ AB চাপের ডিগ্রি পরিমাপ = DE চাপের ডিগ্রি পরিমাপ।
যেহেতু বৃত্ত দুইটি সমান, সুতরাং সংজ্ঞানুসারে,
চাপ AB = চাপ DE।

সূত্র (ঘ)। r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের যে চাপের ডিগ্রি পরিমাপ x তার দৈর্ঘ্য $s = \frac{\pi rx}{180}$।



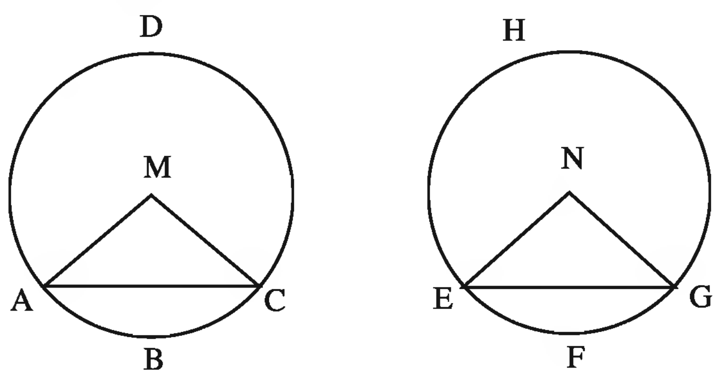
প্রমাণ : বৃত্তটির দুইটি পরস্পর লম্ব ব্যাস AB ও CD বিবেচনা করে দেখা যায় যে, বৃত্তের কেন্দ্র O তে চারটি সমকোণ উৎপন্ন হয়েছে যাদের প্রত্যেকের ডিগ্রি পরিমাপ 90। এই চারটি কোণের প্রত্যেকটিকে 90 সমান ভাগে বিভক্ত করে বৃত্তের কেন্দ্রে $4 \times 90 = 360$ টি 1° পরিমাপের কোণ পাওয়া যায় যার ফলে বৃত্তটি 360 সমান চাপে খণ্ডিত হয়। এরূপ প্রত্যেক চাপের দৈর্ঘ্য a হলে আমরা পাই, $360 \times a$ = বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$.

$$\therefore a = \frac{2\pi r}{360} = \frac{\pi r}{180}$$

সুতরাং যে চাপের ডিগ্রি পরিমাপ x তার দৈর্ঘ্য $s = x \times a = x \times \frac{\pi r}{180} = \frac{\pi rx}{180}$.

উপপাদ্য–৪৫

সমান বৃত্তসমূহে সমান জ্যা সমান চাপ ছিন্ন করে।



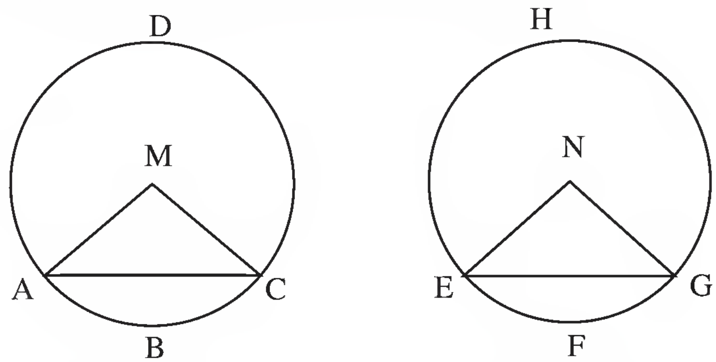
মনে করি, M ও N কেন্দ্রবিশিষ্ট ABCD এবং EFGH বৃত্ত দুইটি সমান অর্থাৎ তাদের ব্যাসার্ধ সমান।
মনে করি, জ্যা AC = জ্যা EG.
প্রমাণ করতে হবে যে, উপচাপ ABC = উপচাপ EFG
এবং অধিচাপ ADC = অধিচাপ EHG.

অঙ্কন : M, A; M, C; N, E এবং N, G যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু ব্যাসার্ধদ্বয় পরস্পর সমান সেহেতু বৃত্তদ্বয় পরস্পর সমান।
এখন ΔMAC এবং ΔNEG এ
$MA = NE$ [সমান সমান ব্যাসার্ধ বলে]
$MC = NG$ [" " " "]
এবং $AC = EG$ [দেওয়া আছে]
$\therefore \Delta MAC \cong \Delta NEG,$
$\therefore \angle AMC = \angle ENG.$
কিন্তু সমান সমান বৃত্তে, যে সকল চাপ কেন্দ্রে সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তারা পরস্পর সমান।
$\therefore$ উপচাপ ABC = উপচাপ EFG.
আবার, যেহেতু বৃত্তদ্বয় পরস্পর সমান
অতএব, সম্পূর্ণ পরিধি $ABCD$ = সম্পূর্ণ পরিধি $EFGH$.
$\therefore$ উপচাপ ABC ব্যতীত অবশিষ্ট অধিচাপ = উপচাপ EFG ব্যতীত অবশিষ্ট অধিচাপ
$\therefore$ অধিচাপ ADC = অধিচাপ EHG.

উপপাদ্য–৪৬

সমান বৃত্তসমূহে যে সকল জ্যা সমান চাপ ছিন্ন করে, তারা পরস্পর সমান।

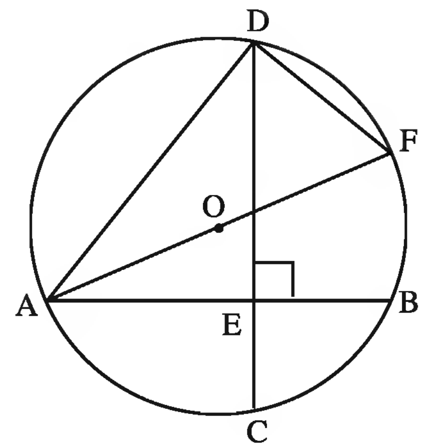


মনে করি, M ও N কেন্দ্রবিশিষ্ট $ABCD$ এবং $EFGH$ বৃত্ত দুইটি সমান অর্থাৎ তাদের ব্যাসার্ধ সমান।
মনে করি, চাপ ABC = চাপ EFG.
প্রমাণ করতে হবে যে, জ্যা AC = জ্যা EG.

অঙ্কন : $M, A; M, C; N, E$ এবং N, G যোগ করি।

প্রমাণ : সমান সমান বৃত্তে সমান সমান চাপের ওপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণগুলো পরস্পর সমান।
$\therefore \angle AMC = \angle ENG$
এখন ΔMAC এবং ΔNEG এ
$MA = NE$ [সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$MC = NG$ [সমান সমান বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle AMC$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle ENG$
$\therefore \Delta MAC \cong \Delta NEG.$
$\therefore AC = EG$
$\therefore$ জ্যা AC = জ্যা EG.

উদাহরণ। একটি বৃত্তের AB, CD জ্যা দুইটি পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, চাপ AC + চাপ BD = অর্ধপরিধি।



AF ব্যাস টানি এবং A, D ও D, F যোগ করি।

ΔADE এর বহিঃস্থ $\angle AEC = \angle DAE + \angle ADE$

$\therefore \angle DAE + \angle ADE =$ এক সমকোণ

[$\because \angle AEC =$ এক সমকোণ]

আবার, $\angle ADE + \angle EDF =$ এক সমকোণ

[$\because \angle ADF$ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

সুতরাং, $\angle DAE + \angle ADE = \angle ADE + \angle EDF$

বা, $\angle DAE = \angle EDF$

অর্থাৎ, $\angle DAB = \angle CDF$.

কিন্তু $\angle DAB$ ও $\angle CDF$ যথাক্রমে BD ও CF চাপের ওপর বৃত্তস্থ কোণ।

$\therefore$ চাপ BD = চাপ CF.

$\therefore$ চাপ AC + চাপ BD = চাপ AC + চাপ CF = অর্ধবৃত্ত ACBF = অর্ধপরিধি

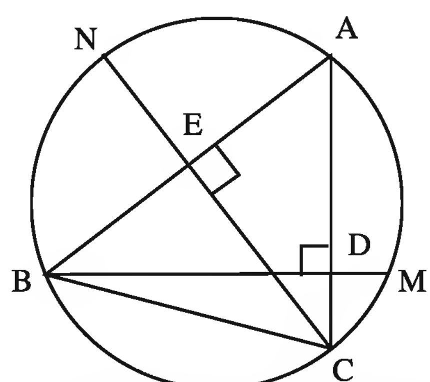
[$\because$ AF ব্যাস]

অনুশীলনী–১০.৬

১। AB ও CD একই বৃত্তে দুইটি সমান্তরাল জ্যা। প্রমাণ কর যে, চাপ AC = চাপ BD.

২। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তে A, B, C তিনটি বিন্দু। যদি $\angle AOC = K\angle AOB$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, AC চাপটি AB চাপের K গুণ।

৩। দেওয়া আছে, ΔABC এর B বিন্দু থেকে AC এর ওপর অঙ্কিত লম্ব BD পরিবৃত্তকে M বিন্দুতে এবং C বিন্দু থেকে AB এর ওপর অঙ্কিত লম্ব CE পরিবৃত্তকে N বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, চাপ MA = চাপ NA.



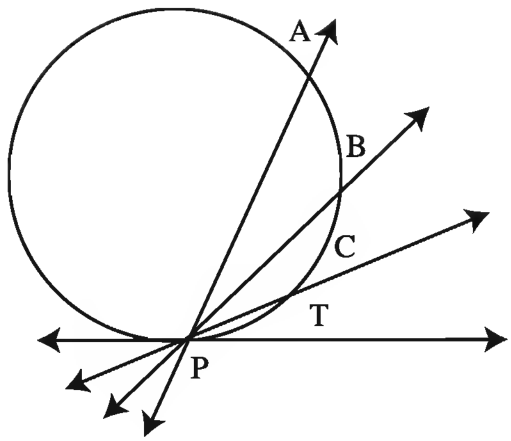
৪। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের অভ্যন্তরস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD + \angle AOC)$.

৫। O কেন্দ্রবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের AB ও CD জ্যা দুইটি বৃত্তের বহিঃস্থ E বিন্দুতে ছেদ করলে প্রমাণ কর যে, $\angle AEC = \frac{1}{2}(\angle BOD \sim \angle AOC)$.

৬। দুইটি সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের সাধারণ জ্যা AB। B বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত কোনো সরলরেখা যদি বৃত্ত দুইটির সাথে P ও Q বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ΔPAQ সমদ্বিবাহু।

৭। দুইটি সমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্ত যদি পরস্পর এরূপভাবে ছেদ করে যে, একটির কেন্দ্র অপর বৃত্তস্থ কোনো বিন্দু হয়, তবে প্রমাণ কর যে, একটি বৃত্তের এক–তৃতীয়াংশ অপরটির অভ্যন্তরে থাকবে।

ছেদক ও স্পর্শক



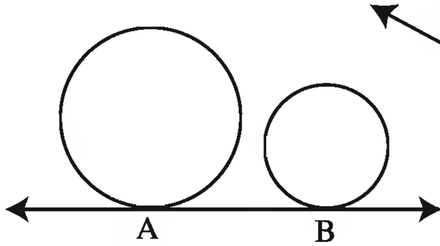
সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার সর্বাধিক দুইটি ছেদবিন্দু থাকতে পারে।

সংজ্ঞা : সমতলস্থ একটি বৃত্ত ও একটি সরলরেখার যদি দুইটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি ছেদক বলা হয় এবং যদি একটি ও কেবল একটি ছেদবিন্দু থাকে তবে রেখাটিকে বৃত্তটির একটি স্পর্শক বলা হয়। শেষোক্ত ক্ষেত্রে, সাধারণ বিন্দুটিকে ঐ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু বলা হয়। চিত্রে, $\overleftrightarrow{PA}$, $\overleftrightarrow{PB}$, $\overleftrightarrow{PC}$ বৃত্তটির ছেদক এবং $\overleftrightarrow{PT}$, বৃত্তটির একটি স্পর্শক ও P এই স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু।

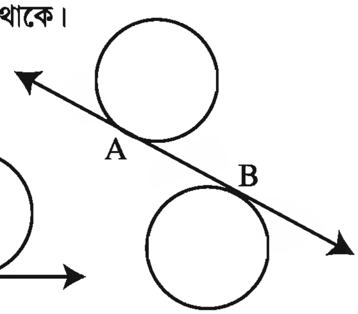
মন্তব্য : বৃত্তের প্রত্যেক ছেদকের ছেদবিন্দুদ্বয়ের অন্তর্বর্তী সকল বিন্দু বৃত্তটির অভ্যন্তরে থাকে।

সাধারণ স্পর্শক

সংজ্ঞা : একটি সরলরেখা যদি দুইটি বৃত্তের স্পর্শক হয়, তবে তাকে বৃত্ত দুইটির একটি সাধারণ স্পর্শক বলা হয়।

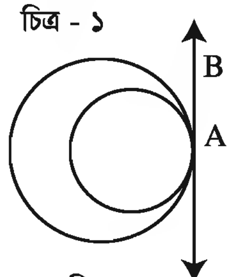


চিত্র - ১

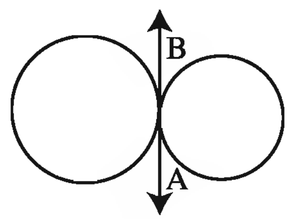


চিত্র - ২

পাশের চিত্রগুলোতে AB উভয় বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক। চিত্র–১ ও চিত্র–২ এ স্পর্শবিন্দু ভিন্ন ভিন্ন। চিত্র–৩ ও চিত্র–৪ এ স্পর্শবিন্দু একই।



চিত্র - ৩

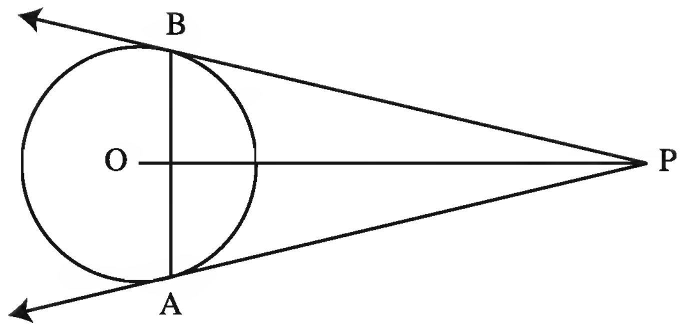


চিত্র - ৪

সংজ্ঞা : দুইটি বৃত্তের কোনো সাধারণ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু দুইটি ভিন্ন হলে স্পর্শকটিকে (ক) সরল সাধারণ স্পর্শক বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে থাকে এবং (খ) তির্যক সাধারণ স্পর্শক বলা হয় যদি বৃত্ত দুইটির কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে থাকে।
চিত্র–১ এ স্পর্শকটি সরল সাধারণ স্পর্শক এবং চিত্র–২ এ স্পর্শকটি তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

সংজ্ঞা : দুইটি বৃত্তের সাধারণ স্পর্শক যদি বৃত্ত দুইটিকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করে তবে ঐ বিন্দুতে বৃত্ত দুইটি পরস্পরকে স্পর্শ করে বলা হয়। এরূপ ক্ষেত্রে, বৃত্ত দুইটির অন্তঃস্পর্শ হয়েছে বলা হয় যদি কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের একই পার্শ্বে থাকে এবং বহিঃস্পর্শ হয়েছে বলা হয় যদি কেন্দ্রদ্বয় স্পর্শকের বিপরীত পার্শ্বে থাকে।
চিত্র–৩ এ বৃত্ত দুইটির অন্তঃস্পর্শ এবং চিত্র–৪ এ বহিঃস্পর্শ হয়েছে।

স্পর্শ–জ্যা এবং স্পর্শ–রেখাংশ



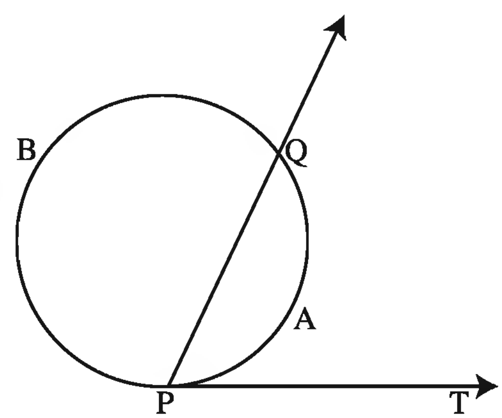
O কেন্দ্রিক কোনো বৃত্তের একটি বহিঃস্থ বিন্দু P। এ পর্যায়ে আমরা স্বীকার করে নিই যে, P বিন্দু দিয়ে যায় বৃত্তটির এরূপ দুইটি ও কেবল দুইটি স্পর্শক রয়েছে এবং এই স্পর্শক দুইটির স্পর্শবিন্দুদ্বয় PO সরলরেখার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত। চিত্রে, PA রশ্মি ও PB রশ্মি এরূপ দুইটি স্পর্শক।

সংজ্ঞা : বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়ে যায় বৃত্তের এরূপ দুইটি স্পর্শকের স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাংশকে বৃত্তটিতে ঐ বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা বলা হয়।
চিত্রে, AB রেখাংশ P বিন্দুর স্পর্শ-জ্যা।

সংজ্ঞা : বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো নির্দিষ্ট বিন্দু P দিয়ে যায় এমন একটি স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু A হলে PA রেখাংশকে P থেকে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত একটি স্পর্শ–রেখাংশ বলা হয়।
চিত্রে, PA রেখাংশ ও PB রেখাংশ P বিন্দু থেকে বৃত্তে অঙ্কিত দুইটি স্পর্শ-রেখাংশ।

একান্তর বৃত্তাংশ

সংজ্ঞা : একটি কোণ যদি এমন হয় যে তার শীর্ষবিন্দু কোনো বৃত্তের একটি বিন্দু এবং একটি বাহু বৃত্তটির একটি স্পর্শক ও অপরটি বৃত্তটির একটি ছেদক, তবে কোণটি বৃত্তটির যে চাপ ছিন্ন করে সেই চাপের অনুবন্ধী চাপকে কোণটির একান্তর বৃত্তাংশ বা একান্তর চাপ বলা হয়।
চিত্রে, P বৃত্তস্থ বিন্দু, PT রশ্মি P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক এবং PQ রশ্মি বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। PBQ চাপ $\angle TPQ$ এর একান্তর বৃত্তাংশ।



উপপাদ্য–৪৭

বৃত্তের যেকোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর লম্ব।

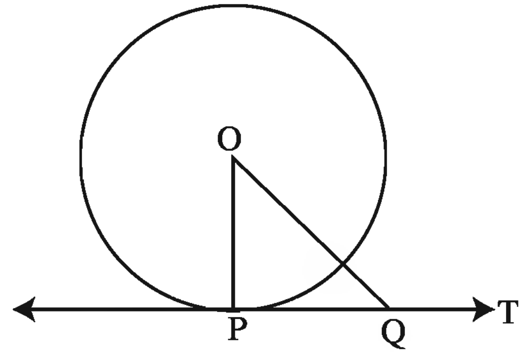
মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের ওপরস্থ P বিন্দুতে PT একটি স্পর্শক এবং OP স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ। প্রমাণ করতে হবে যে, $PT \perp OP$.

অঙ্কন : PT স্পর্শকের ওপর যেকোনো একটি বিন্দু Q নিই এবং O, Q যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু বৃত্তের P বিন্দুতে PT একটি স্পর্শক,

সুতরাং ঐ P বিন্দু ব্যতীত PT এর ওপরস্থ অন্য সকল বিন্দু বৃত্তের বাইরে থাকবে। সুতরাং Q বিন্দুটি বৃত্তের বাইরে অবস্থিত।

$\therefore$ OQ বৃত্তের ব্যাসার্ধ OP এর চেয়ে বড়,



অর্থাৎ, $OQ > OP$ এবং তা স্পর্শ বিন্দু P ব্যতীত PT এর ওপরস্থ সব Q বিন্দুর সকল অবস্থানের জন্য সত্য।
$\therefore$ কেন্দ্র O থেকে PT স্পর্শকের ওপর OP হল ক্ষুদ্রতম দূরত্ব।
সুতরাং $PT \perp OP$.

অনুসিদ্ধান্ত ১। বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক অঙ্কন করা যায়।

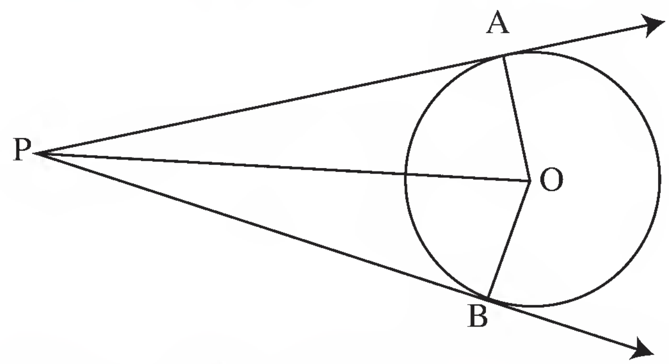
অনুসিদ্ধান্ত ২। স্পর্শ বিন্দুতে স্পর্শকের ওপর অঙ্কিত লম্ব কেন্দ্রগামী।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। বৃত্তের কেন্দ্র থেকে এর কোনো স্পর্শকের ওপর অঙ্কিত লম্ব স্পর্শবিন্দু দিয়ে যায়।

অনুসিদ্ধান্ত ৪। বৃত্তের কোনো বিন্দু দিয়ে ঐ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধের ওপর অঙ্কিত লম্ব উক্ত বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক হয়।

উপপাদ্য–৪৮

বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানলে, ঐ বিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের দূরত্ব সমান হবে।



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তের P একটি বহিঃস্থ বিন্দু এবং PA ও PB রশ্মিদ্বয় বৃত্তের A ও B বিন্দুতে দুইটি স্পর্শক। প্রমাণ করতে হবে যে, $PA = PB$.

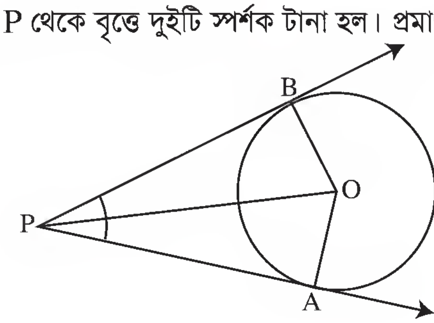
অঙ্কন : O, A; O, B এবং O, P যোগ করি।

প্রমাণ : যেহেতু PA স্পর্শক এবং OA স্পর্শবিন্দুগামী ব্যাসার্ধ, সেহেতু $PA \perp OA$.
$\therefore \angle PAO =$ এক সমকোণ।
অনুরূপে $\angle PBO =$ এক সমকোণ।
$\therefore \Delta PAO$ এবং ΔPBO উভয়ই সমকোণী ত্রিভুজ
এখন, ΔPAO ও ΔPBO সমকোণী ত্রিভুজদ্বয়ে
অতিভুজ $PO =$ অতিভুজ PO
এবং $OA = OB$ [একই বৃত্তের ব্যাসার্ধ]
$\therefore \Delta PAO \cong \Delta PBO$.
$\therefore PA = PB$.

অনুশীলনী–১০.৭

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু P থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা হল। প্রমাণ কর যে, OP সরলরেখা স্পর্শ-জ্যা এর লম্বদ্বিখণ্ডক।

২। দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র এবং PA ও PB স্পর্শকদ্বয় বৃত্তকে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।
প্রমাণ কর যে,
PO, $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।



৩। প্রমাণ কর যে, যেসব বৃত্ত দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে, তাদের কেন্দ্রসমূহ সমরেখ।

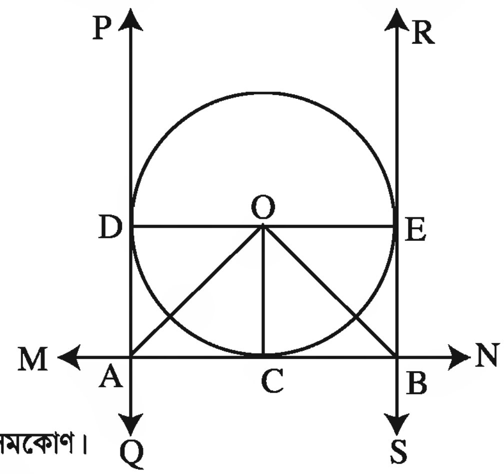
৪। প্রমাণ কর যে, যেসব বৃত্ত একই বিন্দু দিয়ে যায় এবং উক্ত বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করে, তাদের কেন্দ্রগুলো একই সরলরেখায় অবস্থিত।

৫। প্রমাণ কর যে, দুইটি বৃত্ত এককেন্দ্রিক হলে এবং বৃহত্তর বৃত্তটির কোনো জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে স্পর্শ করলে উক্ত জ্যা স্পর্শবিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়।

৬। AB কোনো বৃত্তের ব্যাস এবং BC ব্যাসার্ধের সমান একটি জ্যা। যদি A ও C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় পরস্পর D বিন্দুতে মিলিত হয়, তবে প্রমাণ কর যে, ACD একটি সমবাহু ত্রিভুজ।

৭। দেওয়া আছে, O বৃত্তের কেন্দ্র। দুইটি সমান্তরাল স্পর্শক PQ, RS ও অন্য একটি স্পর্শক MN বৃত্তটিকে যথাক্রমে D, E ও C বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। PQ ও RS স্পর্শকদ্বয় MN কে যথাক্রমে A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে।

প্রমাণ কর যে, $\angle AOB$ = এক সমকোণ।



[ইঙ্গিত : ΔADO ও ΔACO এ

$AD = AC$, $OD = OC$ এবং $AO = AO$.

$\therefore \Delta ADO \cong \Delta ACO$.

অতএব $\angle DAO = \angle CAO$

$\therefore \angle CAO = \frac{1}{2} \angle DAC$.

অনুরূপভাবে, $\angle CBO = \frac{1}{2} \angle EBC$.

এখন, $\angle DAC + \angle EBC$ = দুই সমকোণ।

$\therefore \angle CAO + \angle CBO = \frac{1}{2}(\angle DAC + \angle EBC)$ = এক সমকোণ।

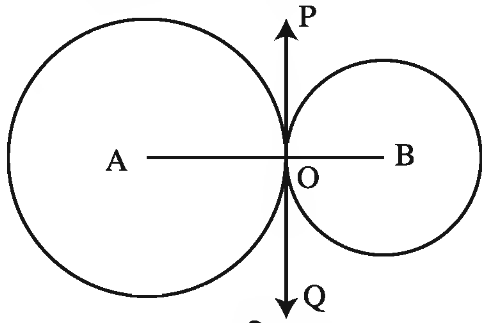
আবার, ΔAOB এ $\angle AOB = \angle OAB + \angle OBA$ = এক সমকোণ।

$\therefore \angle AOB$ = এক সমকোণ।]

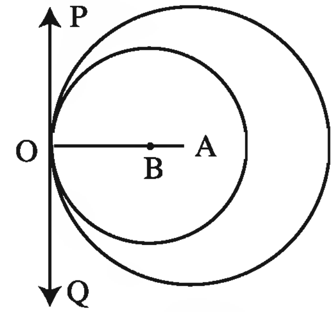
৮। প্রমাণ কর যে, কোনো বৃত্তের পরিলিখিত চতুর্ভুজের যেকোনো দুইটি বিপরীত বাহু কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে, তারা পরস্পর সম্পূরক।

উপপাদ্য–৪৯

দুইটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয় ও স্পর্শ বিন্দু সমরেখ হবে।



চিত্র – ১



চিত্র – ২

মনে করি, A এবং B কেন্দ্রবিশিষ্ট দুইটি বৃত্ত পরস্পর O বিন্দুতে স্পর্শ করে। প্রমাণ করতে হবে যে, A, O এবং B বিন্দু তিনটি সমরেখ।

অঙ্কন : যেহেতু বৃত্তদ্বয় পরস্পর O বিন্দুতে স্পর্শ করেছে, সুতরাং O বিন্দুতে তাদের একটি সাধারণ স্পর্শক থাকবে। এখন O বিন্দুতে সাধারণ স্পর্শক POQ অঙ্কন করি এবং O, A ও O, B যোগ করি।

প্রমাণ : A কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে OA স্পর্শ বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং POQ স্পর্শক।
সুতরাং $\angle POA$ = এক সমকোণ। তদ্রূপ $\angle POB$ = এক সমকোণ
বা $\angle AOB$ = দুই সমকোণ।
$\angle POA + \angle POB$ = এক সমকোণ + এক সমকোণ = দুই সমকোণ।
বা $\angle AOB$ = দুই সমকোণ
$\therefore$ অর্থাৎ $\angle AOB$ একটি সরলকোণ। A, O এবং B বিন্দুত্রয় সমরেখ।
আবার, অন্তঃস্পর্শকের ক্ষেত্রে অর্থাৎ চিত্র–২ এ $\angle POA = \angle POB$ = এক সমকোণ
অর্থাৎ AO এবং BO উভয়ই POQ রেখার O বিন্দুতে O এর ওপর লম্ব।
অতএব, AO, BO একই সরলরেখায় অবস্থিত।
সুতরাং উভয়ক্ষেত্রেই A, O এবং B বিন্দুত্রয় সমরেখ।

অনুসিদ্ধান্ত ১। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের সমষ্টির সমান হবে।

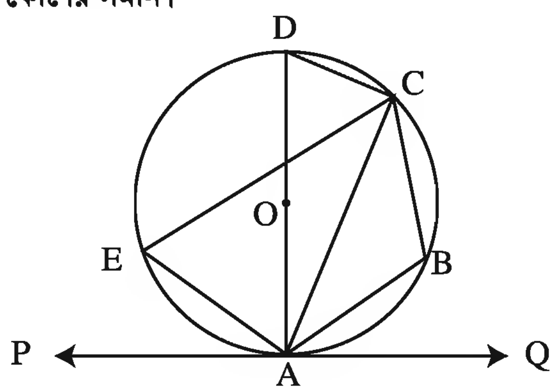
অনুসিদ্ধান্ত ২। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান হবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৩। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্পর্শ করলে, স্পর্শবিন্দু ছাড়া প্রত্যেক বৃত্তের অন্য সকল বিন্দু অপর বৃত্তের বাইরে থাকবে।

অনুসিদ্ধান্ত ৪। দুইটি বৃত্ত পরস্পরকে অন্তঃস্পর্শ করলে, স্পর্শবিন্দু ছাড়া ছোট বৃত্তের অন্য সকল বিন্দু বড় বৃত্তটির অভ্যন্তরে থাকবে।

উপপাদ্য–৫০

বৃত্তের ওপরস্থ কোনো বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক এবং ঐ বিন্দুগামী যেকোনো জ্যা-এর অন্তর্গত কোণ তার একান্তর বৃত্তাংশস্থ যেকোনো কোণের সমান।



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের ওপরস্থ A বিন্দুতে PAQ একটি স্পর্শক এবং ঐ বিন্দুগামী AC একটি জ্যা।
মনে করি, AC জ্যা বৃত্তটিকে ABC এবং AEC চাপে বিভক্ত করেছে যেখানে B বিন্দু Q এর দিকে এবং E বিন্দু P এর দিকে আছে। তাহলে $\angle AEC$, $\angle QAC$ এর একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ এবং $\angle ABC$, $\angle PAC$ এর একান্তর বৃত্তাংশস্থ কোণ।
প্রমাণ করতে হবে যে,

$\angle QAC = \angle AEC$

এবং $\angle PAC = \angle ABC$.

অঙ্কন : A বিন্দুগামী ব্যাস AD আঁকি এবং D, C যোগ করি।
প্রমাণ : যেহেতু A স্পর্শ বিন্দুতে PAQ স্পর্শক এবং AD ব্যাস।
অতএব, $\angle DAQ$ = এক সমকোণ
বা $\angle DAC + \angle QAC$ = এক সমকোণ।

আবার $\angle ACD$-এ, $\angle ACD$ = এক সমকোণ [অর্ধবৃত্তস্থ কোণ]

$\therefore$ $\angle DAC + \angle ADC$ = এক সমকোণ

অতএব, $\angle DAC + \angle ADC = \angle DAC + \angle QAC$

$\therefore$ $\angle ADC = \angle QAC.$

কিন্তু $\angle ADC = \angle AEC$ [যেহেতু একই চাপ এর ওপর দন্ডায়মান বৃত্তস্থ কোণ]

$\therefore$ $\angle QAC = \angle AEC.$

যেহেতু ABCE চতুর্ভুজটি বৃত্তে অন্তর্লিখিত,

$\therefore$ $\angle ABC + \angle AEC$ = দুই সমকোণ।

আবার, $\angle PAC + \angle QAC$ = দুই সমকোণ। [রৈখিক যুগল কোণ]

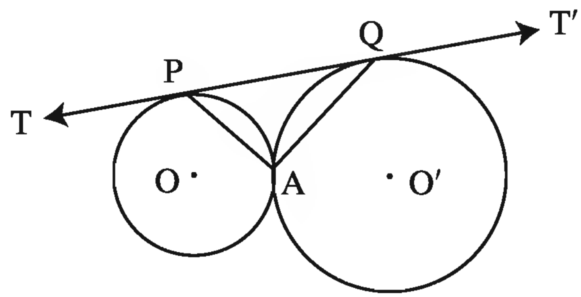
অতএব, $\angle PAC + \angle QAC = \angle ABC + \angle AEC$

$\therefore$ $\angle PAC = \angle ABC$ [$\because \angle QAC = \angle AEC$]

অনুশীলনী–১০.৮

১। P কোনো বৃত্তের APB চাপের মধ্যবিন্দু। প্রমাণ কর যে, P বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শক AB জ্যা এর সমান্তরাল।

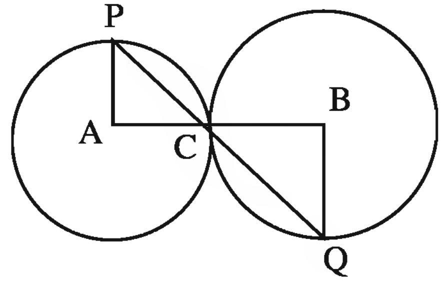
২। দেওয়া আছে, দুইটি বৃত্ত A বিন্দুতে বহিঃস্পর্শ করেছে। TT′ স্পর্শক বৃত্ত দুইটিকে P ও Q বিন্দুতে স্পর্শ করেছে।
প্রমাণ কর যে, $\angle PAQ$ = এক সমকোণ।



৩। কোনো বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত হলে, দেখাও যে, ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকগুলো অপর একটি সমবাহু ত্রিভুজ গঠন করে।

৪। দেওয়া আছে, A ও B বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র এবং C বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু। C বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত রেখাংশ বৃত্তদ্বয়কে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করেছে।
প্রমাণ কর যে, AP || BQ.

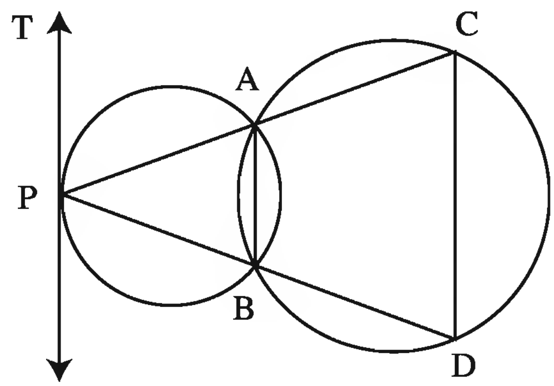
[ইঙ্গিত : ΔACP এ,
$AC = AP$
$\therefore$ $\angle APC = \angle ACP.$
অনুরূপভাবে, $\angle BQC = \angle BCQ.$
কিন্তু, $\angle ACP = \angle BCQ.$
$\therefore$ $\angle APC = \angle BQC.$
অতএব, AP = BQ]



৫। AB, AC কোনো বৃত্তের দুইটি সমান জ্যা। প্রমাণ কর যে, BC রেখাংশ A বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের সমান্তরাল।

৬। দুইটি বৃত্ত O বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করেছে এবং তাদের একটির ব্যাসার্ধ অপরটির ব্যাসের সমান। OPQ রেখাংশ ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে P বিন্দুতে এবং বৃহত্তর বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করেছে। প্রমাণ কর যে, $OP = PQ$.

৭। দুইটি বৃত্ত A ও B বিন্দুতে ছেদ করেছে এবং বৃত্তদ্বয়ের একটির P বিন্দু দিয়ে অঙ্কিত PAC এবং PBD রেখাংশদ্বয় অন্য বৃত্তটিকে যথাক্রমে C ও D বিন্দুতে ছেদ করেছে।
প্রমাণ কর যে, CD রেখাংশ P বিন্দুতে প্রথম বৃত্তের স্পর্শকের সমান্তরাল।



[ইঙ্গিত : TP স্পর্শক এবং PA রেখাংশ বৃত্তের একটি জ্যা।
$\therefore \angle TPA =$ একান্তর বৃত্তাংশস্থ $\angle PBA$.
আবার, $\angle PBA =$ বিপরীত অন্তঃস্থ $\angle ACD$
$\therefore \angle TPA = \angle PCD$. কিন্তু এরা একান্তর কোণ;
$\therefore PT \mid\mid CD$]

৮। ΔABC এর $\angle C$ সমকোণ এবং CD রেখাংশ AB রেখাংশের ওপর লম্ব। প্রমাণ কর যে, CD রেখাংশ এবং ΔABC এর পরিবৃত্তে C বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের অন্তর্গত একটি কোণকে BC সমদ্বিখণ্ডিত করে।

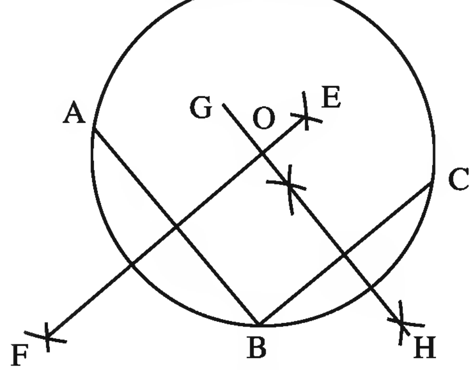
৯। দুইটি বৃত্ত P বিন্দুতে অন্তঃস্পর্শ করেছে। বৃহত্তর বৃত্তের AB জ্যা ক্ষুদ্রতর বৃত্তটিকে C বিন্দুতে স্পর্শ করেছে। দেখাও যে, PC রেখাংশ $\angle APB$ কে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

একাদশ অধ্যায়

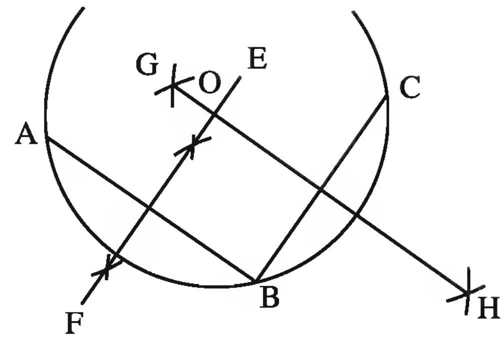
বৃত্ত সম্পর্কীয় সম্পাদ্য

সম্পাদ্য–১১.১

একটি বৃত্ত বা বৃত্তচাপ দেওয়া আছে, কেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।



চিত্র–১



চিত্র–২

একটি বৃত্ত চিত্র–১ বা বৃত্তচাপ চিত্র–২ দেওয়া আছে; বৃত্তটির বা বৃত্তচাপটির কেন্দ্র নির্ণয় করতে হবে।

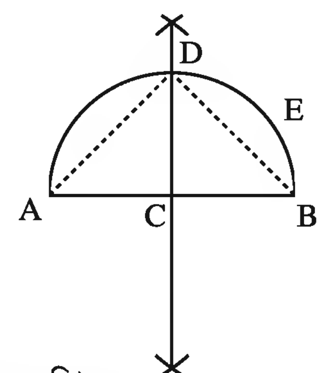
অঙ্কন : প্রদত্ত বৃত্তে বা বৃত্তচাপে তিনটি বিন্দু A, B ও C নিই। A, B এবং B, C যোগ করি। AB ও BC জ্যা দুইটির লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EF ও GH রেখাংশ দুইটি টানি। মনে করি, তারা পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে। সুতরাং, O বিন্দুই বৃত্তের বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র।

প্রমাণ : EF রেখাংশ AB জ্যা এর এবং GH রেখাংশ BC জ্যা এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক। সুতরাং EF ও GH উভয়ে কেন্দ্রগামী এবং O তাদের সাধারণ ছেদ বিন্দু। সুতরাং O বিন্দুই বৃত্তের বা বৃত্তচাপের কেন্দ্র।

সম্পাদ্য–১১.২

বৃত্তের একটি নির্দিষ্ট চাপকে সমদ্বিখণ্ডিত করতে হবে।

মনে করি, কোনো বৃত্তের AEB একটি নির্দিষ্ট চাপ। একে সমদ্বিখণ্ডিত করতে হবে।



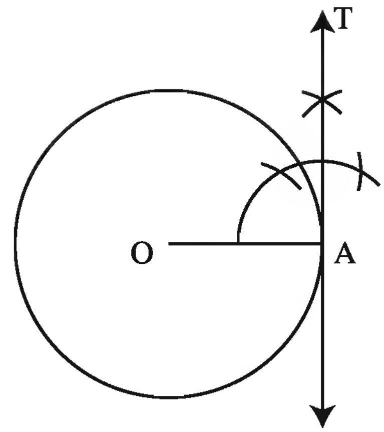
অঙ্কন : A, B যোগ করি। AB জ্যা এর লম্ব সমদ্বিখণ্ডক CD রেখাংশ আঁকি। মনে করি, তা চাপটিকে D বিন্দুতে ছেদ করে। তাহলে, AEB চাপ D বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হল।

প্রমাণ : A, D ও B, D যোগ করি এবং মনে করি, C বিন্দুটি AB এর ওপর অবস্থিত।
এখন, ΔACD এবং ΔBCD এ
$AC = BC$ [অঙ্কন অনুসারে]
$DC = DC$
এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle ACD$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle BCD$ [প্রত্যেকে এক সমকোণ]

$\therefore$ $\Delta ACD \cong \Delta BCD$
$\therefore$ $AD = BD$
সুতরাং জ্যা $AD =$ জ্যা BD
অতএব, চাপ $AD =$ চাপ BD.

সম্পাদ্য–১১.৩

বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটি স্পর্শক আঁকতে হবে।



মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের A একটি বিন্দু। A বিন্দুতে বৃত্তে একটি স্পর্শক আঁকতে হবে।

অঙ্কন : O, A যোগ করি। A বিন্দুতে OA এর উপর AT লম্ব আঁকি। তাহলে AT নির্ণেয় স্পর্শক।

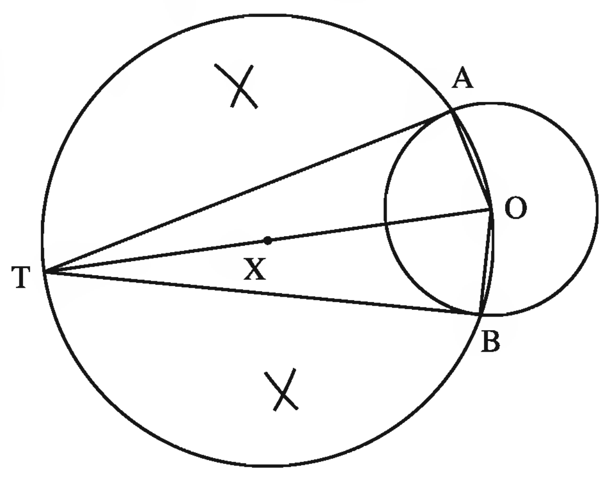
প্রমাণ : OA রেখাংশ A বিন্দুগামী ব্যাসার্ধ এবং AT তার ওপর লম্ব।
সুতরাং, AT রেখা নির্ণেয় স্পর্শক।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : বৃত্তের কোনো বিন্দুতে একটিমাত্র স্পর্শক আঁকা হয়।

সম্পাদ্য–১১.৪

বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে বৃত্তটির স্পর্শক আঁকতে হবে।

মনে করি, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তের T একটি বহিঃস্থ বিন্দু। T বিন্দু থেকে বৃত্তের একটি স্পর্শক আঁকতে হবে।



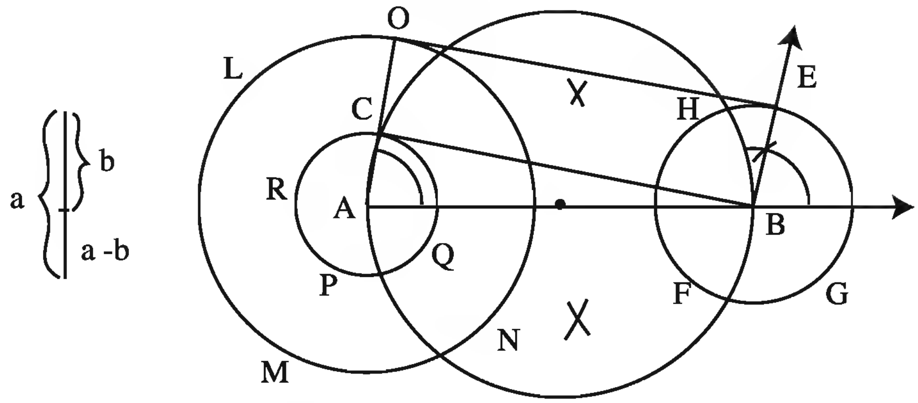
অঙ্কন : T, O যোগ করি। TO রেখাংশের মধ্যবিন্দু X নির্ণয় করি। এখন X কে কেন্দ্র করে XO এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি। মনে করি, নতুন অঙ্কিত বৃত্তটি প্রদত্ত বৃত্তকে A ও B বিন্দুতে ছেদ করে।
A, T এবং B, T যোগ করি।
তাহলে AT বা BT নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রমাণ : A, O এবং B, O যোগ করি।
ATB বৃত্তে TO ব্যাস।
$\therefore$ $\angle TAO =$ এক সমকোণ
সুতরাং, OA রেখাংশ AT রেখাংশের ওপর লম্ব।
অতএব, O কেন্দ্রিক বৃত্তের A বিন্দুতে AT রেখাংশ একটি স্পর্শক।
অনুরূপভাবে, BT রেখাংশও একটি স্পর্শক।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে দুইটি ও কেবল দুইটি স্পর্শক আঁকা যায়।

সম্পাদ্য–১১.৫

অসমান ব্যাসার্ধবিশিষ্ট দুইটি বৃত্তের একটি সরল সাধারণ স্পর্শক আঁকতে হবে।



মনে করি, LMN ও FGH বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র যথাক্রমে A ও B এবং তাদের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে a ও b যেখানে $a > b$। বৃত্ত দুইটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক আঁকতে হবে।

অঙ্কন : A কে কেন্দ্র করে $(a-b)$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে PQR বৃত্ত আঁকি। B থেকে PQR বৃত্তে BC স্পর্শক আঁকি এবং মনে করি, তা বৃত্তটিকে C বিন্দুতে স্পর্শ করে। A, C যোগ করি এবং বর্ধিত করি। মনে করি, তা LMN বৃত্তকে O বিন্দুতে ছেদ করে। B বিন্দু দিয়ে $BE \parallel AO$ আঁকি এবং মনে করি, তা FGH বৃত্তটিকে E বিন্দুতে ছেদ করে। O, E যোগ করি। তাহলে, OE রেখাংশ নির্ণেয় স্পর্শক।

প্রমাণ : যেহেতু PQR বৃত্তে BC স্পর্শক,
$\therefore \angle ACB =$ এক সমকোণ অর্থাৎ $BC \perp AO$।
$\therefore \angle OCB =$ এক সমকোণ
আবার, $CO = AO - AC = a - (a - b) = b$
এবং $AO \parallel BE$ [অঙ্কন অনুসারে]
$CO \parallel BE$ [$\because$ CO, AO এর ওপর অবস্থিত]
$\therefore$ OCBE একটি সামান্তরিক।
আবার যেহেতু, $\angle OCB$ এক সমকোণ, সুতরাং OCBE একটি আয়তক্ষেত্র।
$\therefore \angle COE = \angle BEO =$ এক সমকোণ। সুতরাং CO এবং BE উভয়ে OE এর ওপর লম্ব।
অতএব, OE রেখাংশ বৃত্ত দুইটির একটি সরল সাধারণ স্পর্শক।

বিশেষ দ্রষ্টব্য

(১) যদি বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধ সমান হয়, তবে ওপরের পদ্ধতিতে অঙ্কন সম্ভব নয়। এক্ষেত্রে A ও B কেন্দ্র দুইটি যোগ করে AB রেখাংশের ওপর AO এবং BE একই বরাবর লম্ব আঁকলে যদি তারা বৃত্তদ্বয়কে যথাক্রমে O এবং E বিন্দুতে ছেদ করে তবে OE ই নির্ণেয় স্পর্শক হবে। এরূপ দুইটি সাধারণ স্পর্শক আঁকা যাবে যারা পরস্পর সমান্তরাল হবে।

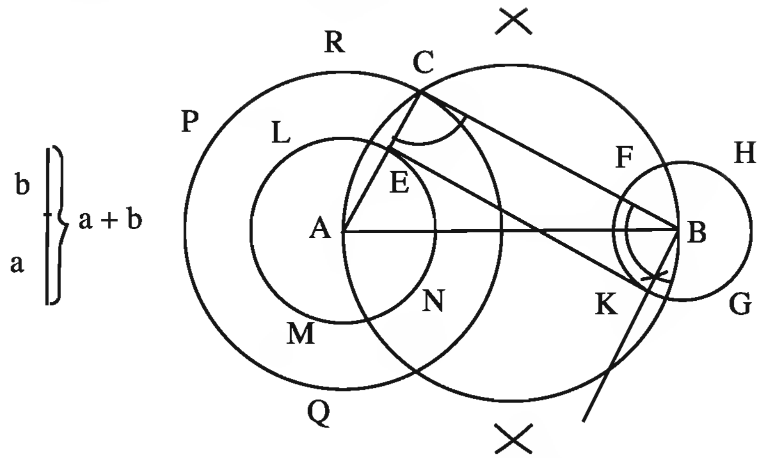
(২) যদি বৃত্ত দুইটির একটি সম্পূর্ণভাবে অপরটির অভ্যন্তরে থাকে তবে কোনো সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন সম্ভব নয়।

(৩) যদি বৃত্ত দুইটি অন্তঃস্থভাবে স্পর্শ করে তবে তাদের স্পর্শ বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকটিই একমাত্র সাধারণ স্পর্শক হবে।

(৪) যদি বৃত্ত দুইটি বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে তবে তাদের স্পর্শ বিন্দুতে একটি সাধারণ স্পর্শক এবং পূর্বে বর্ণিত পদ্ধতিতে আরও দুইটি সাধারণ স্পর্শক পাওয়া যাবে।

সম্পাদ্য–১১.৬

দুইটি বৃত্তের তির্যক সাধারণ স্পর্শক অঙ্কন করতে হবে।



মনে করি, LMN ও FGH বৃত্ত দুইটির কেন্দ্র যথাক্রমে A ও B এবং তাদের ব্যাসার্ধ যথাক্রমে a ও b. বৃত্ত দুইটির একটির তির্যক সাধারণ স্পর্শক আঁকতে হবে।

অঙ্কন : A বিন্দুকে কেন্দ্র করে $(a + b)$ এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে PQR বৃত্ত আঁকি। B বিন্দু থেকে PQR বৃত্তে BC স্পর্শক আঁকি এবং মনে করি তা বৃত্তটিকে C বিন্দুতে স্পর্শ করে। C, A যোগ করি এবং মনে করি, CA রেখাংশ LMN বৃত্তকে E বিন্দুতে ছেদ করে। B বিন্দু দিয়ে $BK \| CA$ আঁকি যা FGH বৃত্তটিকে K বিন্দুতে ছেদ করে। E, K যোগ করি। তাহলে, EK রেখাংশ বৃত্তদ্বয়ের নির্ণেয় তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

প্রমাণ : PQR বৃত্তে BC স্পর্শক
$\therefore \angle ECB =$ এক সমকোণ।
আবার, $CE = b = BK$ এবং $CE \| BK$. [অঙ্কন অনুসারে]
$\therefore$ CEKB একটি সামান্তরিক।
$\therefore$ যেহেতু CEKB সামান্তরিকের $\angle CEK =$ এক সমকোণ
সুতরাং, CEKB একটি আয়তক্ষেত্র।
$\therefore \angle BKE = \angle CEK =$ এক সমকোণ।
আবার, $\angle AEK =$ এক সমকোণ [$\because \angle AEC =$ এক সরলকোণ]
সুতরাং, EK রেখাংশ বৃত্ত দুইটির সাধারণ স্পর্শক।
আবার, যেহেতু বৃত্ত দুইটি EK এর বিপরীত পাশে অবস্থিত,
সুতরাং EK রেখাংশ তাদের তির্যক সাধারণ স্পর্শক।

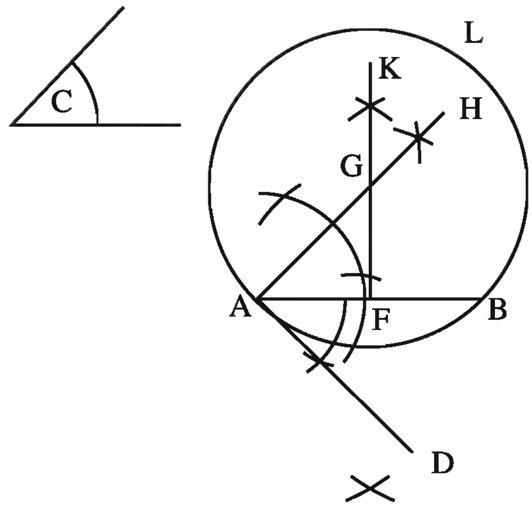
বিশেষ দ্রষ্টব্য : বৃত্ত দুইটির ব্যাসার্ধ সমান হলেও ওপরের প্রণালীতে তির্যক সাধারণ স্পর্শক আঁকা যাবে।

সম্পাদ্য–১১.৭

একটি রেখাংশের প্রান্তবিন্দু দিয়ে এমন একটি বৃত্তাংশ আঁকতে হবে যেন ঐ বৃত্তাংশে রেখাংশটি একটি নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ ধারণ করে।

মনে করি, AB একটি রেখাংশ এবং $\angle C$ একটি নির্দিষ্ট কোণ। A ও B বিন্দু দিয়ে এরূপ একটি বৃত্তাংশ আঁকতে হবে, যেন ঐ বৃত্তাংশস্থ কোণ $\angle C$ এর সমান হয়।

অঙ্কন : AB রেখাংশের A বিন্দুতে $\angle C$ এর সমান করে $\angle BAD$ আঁকি। A বিন্দুতে AD রেখাংশের ওপর AH লম্ব টানি। AB রেখাংশের লম্বদ্বিখণ্ডক KF টানি। KF রেখাও AH রেখাংশকে G বিন্দুতে ছেদ করে। G কে কেন্দ্র করে GA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে ALB বৃত্তচাপ আঁকি যেখানে L এবং D বিন্দু দুইটি AB রেখাংশের বিপরীত পাশে অবস্থিত।



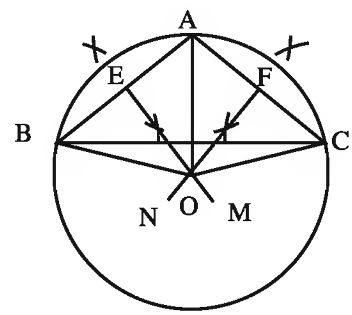
তাহলে, ALB বৃত্তাংশই নির্ণেয় বৃত্তাংশ।

প্রমাণ : KF রেখা AB রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক হওয়ায় G বিন্দু A ও B বিন্দু থেকে সমদূরবর্তী।
অর্থাৎ $GA = GB$.
সুতরাং অঙ্কিত ALB বৃত্তচাপটি A ও B বিন্দু দিয়ে যাবে।
যেহেতু AD বৃত্তটির স্পর্শক এবং AB জ্যা [অঙ্কন অনুসারে].
সুতরাং $\angle BAD$ বা $\angle C$ একান্তর বৃত্তাংশ ALB তে অবস্থিত যেকোনো কোণের সমান হবে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : প্রদত্ত কোণটি এক সমকোণের সমান হলে প্রদত্ত রেখাংশের ওপর অর্ধবৃত্তই নির্ণেয় বৃত্তাংশ হবে।

সম্পাদ্য–১১.৮

কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকতে হবে।



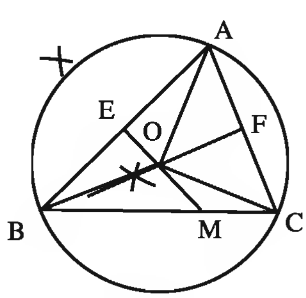
মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। এর পরিবৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের তিনটি শীর্ষবিন্দু A, B ও C বিন্দু দিয়ে যায়।

অঙ্কন : AB ও AC রেখাংশের লম্বসমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে EM ও FN রেখাংশ আঁকি। মনে করি, তারা পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে। A, O যোগ করি। O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।
তাহলে, বৃত্তটি A, B ও C বিন্দুগামী হবে এবং এই বৃত্তটিই Δ ABC এর নির্ণেয় পরিবৃত্ত।

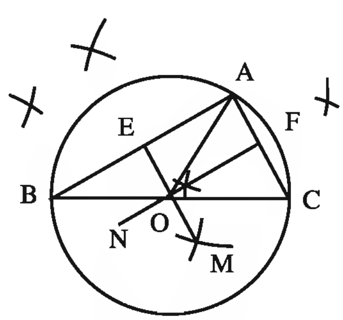
প্রমাণ : B, O এবং C, O যোগ করি। O বিন্দুটি AB এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক EM এর ওপর অবস্থিত।
$\therefore OA = OB$. একইভাবে, $OA = OC$
$\therefore OA = OB = OC$
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OA এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি A, B ও C বিন্দু তিনটি দিয়ে যাবে।
সুতরাং, এই বৃত্তটিই Δ ABC এর পরিবৃত্ত।

মন্তব্য : ওপরের চিত্রে একটি স্থূলকোণী ত্রিভুজের পরিবৃত্ত আঁকা হয়েছে। সূক্ষ্মকোণী এবং সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পাশের চিত্র অনুযায়ী হবে।

লক্ষণীয় যে, স্থূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের বহির্ভাগে, সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র ত্রিভুজের অভ্যন্তরে এবং সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে পরিকেন্দ্র অতিভুজের ওপর অবস্থিত।



সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে

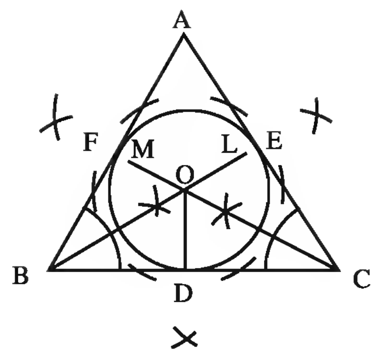


সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে

সম্পাদ্য–১১.৯

কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে।

মনে করি, ΔABC একটি ত্রিভুজ। এর অন্তর্বৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ ΔABC এর ভিতরে এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা BC, CA ও AB বাহু তিনটির প্রত্যেকটিকে স্পর্শ করে।



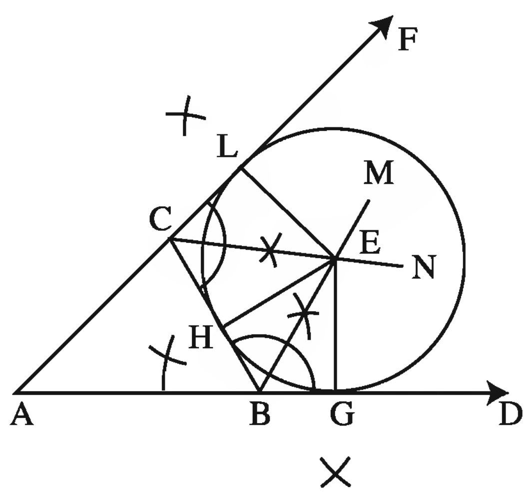
অঙ্কন : $\angle ABC$ ও $\angle ACB$ এর সমদ্বিখণ্ডক যথাক্রমে BL ও CM আঁকি। মনে করি, তারা O বিন্দুতে ছেদ করে। O থেকে BC এর ওপর OD লম্ব আঁকি এবং মনে করি, তা BC কে D বিন্দুতে ছেদ করে। O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।
তাহলে, এই বৃত্তটিই নির্ণেয় অন্তর্বৃত্ত।

প্রমাণ : O থেকে AC ও AB এর ওপর যথাক্রমে OE ও OF লম্ব টানি। মনে করি, লম্বদ্বয় বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে E ও F বিন্দুতে ছেদ করে।
O বিন্দু $\angle ABC$ এর দ্বিখণ্ডকের ওপর অবস্থিত।
$\therefore OF = OD$
অনুরূপভাবে, O বিন্দু $\angle ABC$ এর দ্বিখন্ডকের ওপর অবস্থিত বলে $OF = OD$
$\therefore OD = OE = OF$
সুতরাং O কে কেন্দ্র করে OD এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে তা D, E এবং F বিন্দু দিয়ে যাবে।
আবার, OD, OE ও OF এর প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে BC, AC ও AB লম্ব।
সুতরাং বৃত্তটি ΔABC এর ভিতরে থেকে এর বাহু তিনটিকে যথাক্রমে D, E ও F বিন্দুতে স্পর্শ করে।
অতএব, DEF বৃত্তটিই ΔABC এর অন্তর্বৃত্ত হবে।

সম্পাদ্য–১১.১০

কোনো নির্দিষ্ট ত্রিভুজের বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে।

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। এর বহির্বৃত্ত আঁকতে হবে। অর্থাৎ এমন একটি বৃত্ত আঁকতে হবে, যা ত্রিভুজের একটি বাহুকে এবং অপর দুই বাহুর বর্ধিতাংশকে স্পর্শ করে।



অঙ্কন : AB ও AC বাহুদ্বয়কে যথাক্রমে D ও F পর্যন্ত বর্ধিত করি। $\angle DBC$ ও $\angle FCB$ এর সমদ্বিখণ্ডক BM এবং CN আঁকি। মনে করি, E তাদের ছেদ বিন্দু। E থেকে BC এর ওপর EH লম্ব আঁকি এবং মনে করি তা BC কে H বিন্দুতে ছেদ করে। E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে একটি বৃত্ত আঁকি।
তাহলে, এই বৃত্তটি নির্ণেয় বহির্বৃত্ত।

প্রমাণ : E থেকে BD ও CF রেখাংশের ওপর যথাক্রমে EG ও EL লম্ব টানি। মনে করি, লম্বদ্বয়, রেখাংশদ্বয়কে যথাক্রমে G ও L বিন্দুতে ছেদ করে।

E বিন্দুটি $\angle DBC$ এর দ্বিখন্ডকের ওপর অবস্থিত
$\therefore EH = EG$
অনুরূপভাবে, E বিন্দুটি $\angle FCB$ এর দ্বিখন্ডকের ওপর অবস্থিত বলে $EH = EL$
$\therefore EH = EG = EL$
সুতরাং, E কে কেন্দ্র করে EH এর সমান ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত H, G এবং L বিন্দু দিয়ে যাবে।
আবার, EH, EG ও EL এর প্রান্তবিন্দুতে যথাক্রমে BC, BD ও CF রেখাংশ তিনটি লম্ব।
সুতরাং বৃত্তটি রেখাংশ তিনটিকে যথাক্রমে H, G ও L বিন্দু তিনটিতে স্পর্শ করে।
অতএব, HGL বৃত্তটিই ΔABC এর বহির্বৃত্ত হবে।

মন্তব্য : কোনো ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত আঁকা যায়।

অনুশীলনী–১১

১। এরূপ একটি বৃত্ত আঁক, যা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু A ও B দিয়ে যাবে এবং যার কেন্দ্র AB রেখা থেকে 5 সে. মি. দূরে থাকবে।

২। এরূপ একটি বৃত্ত আঁক, যা দুইটি বৃত্তের ছেদবিন্দু দিয়ে যাবে এবং যার কেন্দ্র একটি নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর থাকবে। কখন অঙ্কন সম্ভব নয় তা বর্ণনা কর।

[**ইঙ্গিত :** A ও B বৃত্তদ্বয়ের ছেদবিন্দু এবং LM নির্দিষ্ট সরলরেখা হলে, AB এর লম্বদ্বিখণ্ডক আঁক। তা LM কে P বিন্দুতে ছেদ করে। P কে কেন্দ্র করে PA ব্যাসার্ধ নিয়ে বৃত্ত আঁকলে তা ঈপ্সিত বৃত্ত হবে।]

৩। এরূপ একটি বৃত্ত আঁক যেন তা দুইটি সমান্তরাল সরলরেখাকে এবং তাদের একটি নির্দিষ্ট ছেদককে স্পর্শ করে।

৪। এমন একটি বৃত্ত আঁক যা একটি নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং একটি নির্দিষ্ট সরলরেখাকে একটি নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে।

৫। কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার সমান্তরাল হয়।

৬। কোনো বৃত্তে এমন একটি স্পর্শক আঁক যেন তা কোনো নির্দিষ্ট সরলরেখার ওপর লম্ব হয়।

৭। কোনো বৃত্তে এমন দুইটি স্পর্শক আঁক যেন তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ 60° হয়।

৮। 3 সে. মি., 4·5 সে. মি., 5·5 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজের পরিবৃত্ত অঙ্কন কর এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

৯। 5 সে. মি. বাহুবিশিষ্ট একটি সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর CA বাহুকে স্পর্শ করিয়ে একটি বহির্বৃত্ত আঁক এবং এই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

১০। একটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত ও পরিবৃত্ত আঁক।

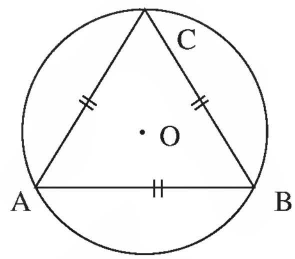
[**ইঙ্গিত :** ABCD বর্গ হলে $\angle A$ ও $\angle B$ কে সমদ্বিখণ্ডিত কর। মনে কর, অন্তর্দ্বিখণ্ডকদ্বয় O বিন্দুতে মিলিত হয়েছে। AB এর লম্বসমদ্বিখণ্ডক OP আঁক। O, A যোগ কর। তাহলে O কে কেন্দ্র করে OP ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি বর্গের অন্তর্বৃত্ত হবে এবং O কে কেন্দ্র করে OA ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্তটি বর্গের পরিবৃত্ত হবে।]

বৃত্ত সংক্রান্ত

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। দুইটি সমান বৃত্ত পরস্পরকে বহিঃস্থভাবে স্পর্শ করে। একটির ব্যাসার্ধ 4 একক হলে, তাদের কেন্দ্রদ্বয়ের মধ্যে দূরত্ব কত একক?

ক. 0 খ. 4
গ. 8 ঘ. 12

২। 

চিত্রে, O কেন্দ্রবিশিষ্ট বৃত্তে ΔABC সমবাহু। নিচের কোনটি $\angle AOB$ এর মান?

ক. 300^0 খ. 240^0
গ. 180^0 ঘ. 120^0

৩। বৃত্তের কোনো বিন্দুতে কয়টি স্পর্শক আঁকা যায় ?

ক. একটি খ. দুইটি
গ. তিনটি ঘ. চারটি

৪। কোনো বৃত্তে একটি সমবাহু ত্রিভুজ অন্তর্লিখিত হলে, ত্রিভুজটির শীর্ষবিন্দুগুলোতে স্পর্শকগুলো যে ত্রিভুজ গঠন করে তা হবে–

ক. সমকোণী খ. সমবাহু
গ. বিষমবাহু ঘ. স্থূলকোণী

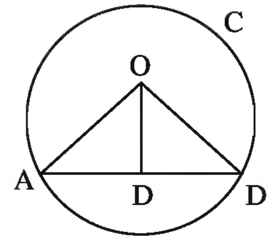
৫। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. স্পর্শ বিন্দুতে স্পর্শকের ওপর অঙ্কিত লম্ব স্পর্শককে সমদ্বিখণ্ডিত করে।
ii. বৃত্তের বহিঃস্থ কোনো বিন্দু থেকে ঐ বৃত্তে দুইটি ও কেবলমাত্র দুইটি স্পর্শক আঁকা যায়।
iii. বৃত্তে অন্তর্লিখিত সামান্তরিক একটি আয়তক্ষেত্র।

ওপরের তথ্যের আলোকে কোন উত্তরটি সঠিক ?

ক. i এবং ii খ. ii এবং iii
গ. i এবং iii ঘ. i , ii এবং iii

O কেন্দ্রবিশিষ্ট ABC বৃত্তে AB ব্যাস ভিন্ন জ্যা। $OD \perp AB$



ওপরের তথ্যের আলোকে (৬-৮) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :

৬। $\angle B = 45^0$ হলে, $\angle AOD =$ কত ?

ক. 90^0 খ. 60^0

গ. 45^0 ঘ. 30^0

৭। $\angle A = 45^0$ হলে, প্রবৃদ্ধ $\angle AOB =$ কত ?

ক. 315^0 খ. 270^0

গ. 225^0 ঘ. 200°

৮। নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক?

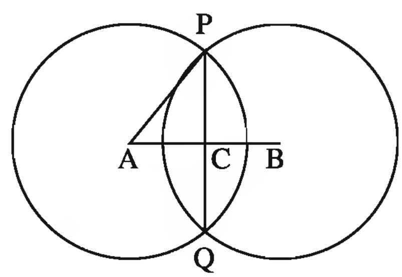
ক. $\Delta OAD = \Delta OBD$ খ. $\Delta OAB \cong \Delta OAD$

গ. $OA = OB = AB$ ঘ. $\angle ODA = \frac{1}{2}\angle AOB$

৯। পাশের চিত্রে ACP কোন ধরনের ত্রিভুজ ?

ক. সমবাহু খ. সমদ্বিবাহু

গ. সূক্ষ্মকোণী ঘ. সমকোণী



১০। ছড়া একটি বৃত্তাকার পথে B বিন্দু থেকে C বিন্দুতে পৌঁছল যেখানে BC চাপ কেন্দ্রে 50^0 কোণ উৎপন্ন করে। আরো কিছুক্ষণ পর A বিন্দুতে পৌঁছল। $\angle BAC$ এর পরিমাণ কত ?

ক. 25^0 খ. 40^0

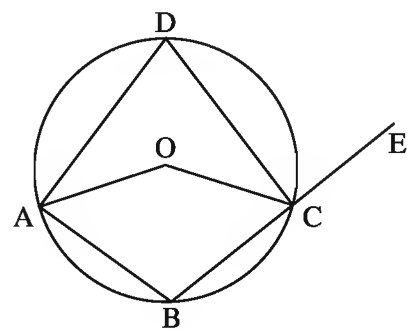
গ. 60^0 ঘ. 90^0

১১। পাশের চিত্রটি লক্ষ কর :

i. $\angle AOC = 2\angle ADC$

ii. $\angle DCE = 2\angle BAD$

iii. $\angle ABC + \angle ADC = 180^0$

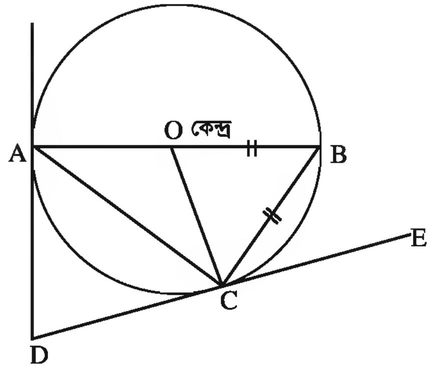


ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i এবং ii খ. ii এবং iii

গ. i এবং iii ঘ. i, ii এবং iii

নিচের চিত্রটি লক্ষ কর এবং (১২-১৪) নং প্রশ্নের উত্তর দাও :



১২। OCB ত্রিভুজ সম্পর্কে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ　　খ. বিষমবাহু ত্রিভুজ

গ. সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ　　ঘ. সমবাহু ত্রিভুজ

১৩। $\angle BCE$ এর সমান –

ক. $\angle OCB$　　খ. $\angle OBC$

গ. $\angle BAC$　　ঘ. $\angle BOC$

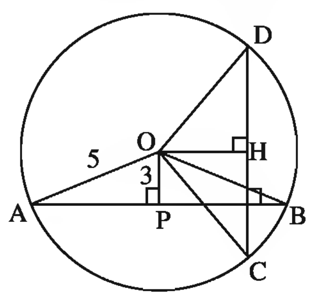
১৪। $\angle BCE + \angle CAD =$ কত ডিগ্রি ?

ক. 60^0　　খ. 90^0

গ. 120^0　　ঘ. 180^0

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। O কেন্দ্রবিশিষ্ট একটি বৃত্তে $AB > CD$, $AB \perp CD$



ক. AP এর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $OH > OP$.

গ. প্রমাণ কর যে, AC ও BD চাপদ্বয় কেন্দ্রে যে দুইটি কোণ ধারণ করে তাদের সমষ্টি দুই সমকোণের সমান।

২। 3 সে.মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট কোনো বৃত্তের কেন্দ্র C. কেন্দ্র থেকে 10 সে.মি. দূরে একটি দণ্ডায়মান খুঁটির পাদবিন্দু T.

ক. তথ্যানুযায়ী জ্যামিতিক চিত্রটি অঙ্কন কর।

খ. দণ্ডায়মান পাদবিন্দু থেকে বৃত্তে দুইটি স্পর্শক আঁক এবং দেখাও যে, খুঁটিটির পাদবিন্দু থেকে স্পর্শ বিন্দু দুইটি সমান দূরত্বে অবস্থিত।

গ. প্রমাণ কর যে, স্পর্শ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক রেখাকে বৃত্তে অন্তর্লিখিত সমবাহু ত্রিভুজের বাহু বিবেচনায় এনে ত্রিভুজের শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শকগুলো যে ত্রিভুজ উৎপন্ন করে তা নতুন একটি সমবাহু ত্রিভুজ হবে।

দ্বাদশ অধ্যায়

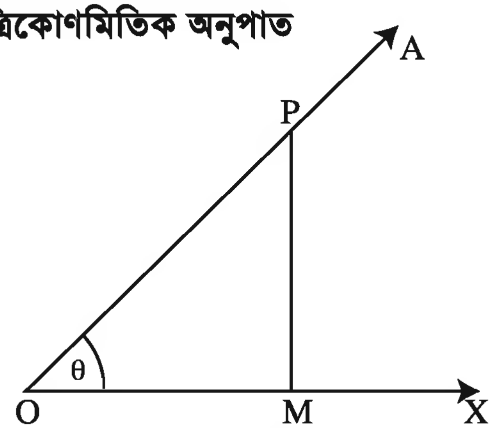
ত্রিকোণমিতি

১২.১। ভূমিকা

মানুষের জ্ঞানের চাহিদা ও অজানাকে জানার জন্য অদম্য কৌতূহল থেকে জ্যামিতিক জ্ঞানের বিকাশের ফলে সৃষ্টি হয় ত্রিকোণমিতি। মানুষের জ্যামিতিক জ্ঞান বেশ প্রাচীন। সেই প্রাচীন যুগে মানুষ জ্যামিতির সাহায্যে নদীর তীরে দাঁড়িয়ে নদীর প্রস্থ নির্ণয় করার কৌশল শিখেছিল। গাছে না উঠেও গাছের ছায়ার সঙ্গে লাঠির তুলনা করে নিখুঁতভাবে গাছের উচ্চতা মাপতে শিখেছিল। কিন্তু এতেও মানুষের জানার কৌতূহল থেমে যায়নি। পৃথিবী থেকে চাঁদ, সূর্য, নক্ষত্র ইত্যাদির দূরত্ব জানার জন্য তারা উদগ্রীব ছিল। কিন্তু জ্যামিতির সাধারণ জ্ঞান থেকে তারা এ সকল সমস্যার সমাধান করতে সক্ষম হয়নি। এতে তাদের নিরলস প্রচেষ্টা থেমে থাকেনি। আর থেমে থাকেনি বলেই এ সকল সমস্যার সমাধান বের করতে গিয়েই সৃষ্টি হয় গণিতের আর একটি শাখা ত্রিকোণমিতি। এর বহুল ব্যবহার আমরা দেখতে পাই প্রাচীন মিশরে ভূমি জরিপ ও ইনৃজিনিয়ারিং কাজে।

অধুনা ত্রিকোণমিতির ব্যবহার গণিতের সকল শাখায়। ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, ত্রিভুজের সমাধান, নেভিগেশন ইত্যাদি ক্ষেত্রে ত্রিকোণমিতির ব্যাপক ব্যবহার হয়ে থাকে।

১২.২। সূক্ষ্মকোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত



চিত্র–১

মনে করি, $\angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ। OA বাহুতে যেকোনো একটি বিন্দু P নিই। P থেকে OX বাহু পর্যন্ত PM লম্ব টানি। তাতে একটি সমকোণী ত্রিভুজ POM গঠিত হল। এই ΔPOM এর PM, OM ও OP বাহুগুলোর যে ছয়টি অনুপাত পাওয়া যায় তাদের $\angle XOA$ এর ত্রিকোণমিতিক অনুপাত বলা হয় এবং তাদের প্রত্যেকটিকে এক একটি সুনির্দিষ্ট নামে নামকরণ করা হয়।

$\angle XOA$ সাপেক্ষে সমকোণী ত্রিভুজ POM এর PM বাহুকে লম্ব, OM বাহুকে ভূমি, OP বাহুকে অতিভুজ ধরা হয়। এখন $\angle XOA = \theta$ ধরলে, θ কোণের যে ছয়টি ত্রিকোণমিতিক অনুপাত পাওয়া যায় তা নিম্নে বর্ণনা করা হল।

সংজ্ঞা : চিত্র–১ এ

$$\frac{PM}{OP} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}} = \theta \text{ কোণের সাইন (sine) বা সংক্ষেপে } \sin\theta$$

$$\frac{OM}{OP} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}} = \theta \text{ কোণের কোসাইন (cosine) বা সংক্ষেপে } \cos\theta$$

$\frac{PM}{OM} = \frac{\text{লম্ব}}{\text{ভূমি}}$ = θ কোণের ট্যানজেন্ট (tangent) বা সংক্ষেপে $\tan\theta$

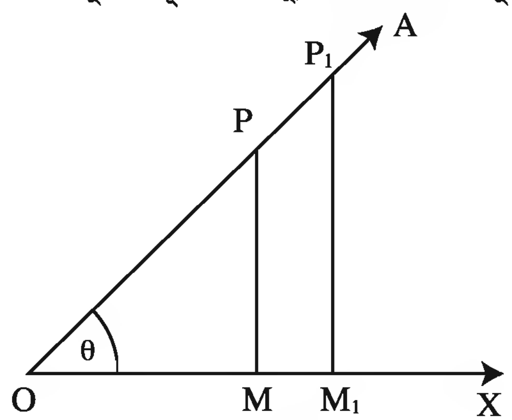
$\frac{OM}{PM} = \frac{\text{ভূমি}}{\text{লম্ব}}$ = θ কোণের কোট্যানজেন্ট (cotangent) বা সংক্ষেপে $\cot\theta$

$\frac{OP}{OM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{ভূমি}}$ = θ কোণের সেক্যান্ট (secant) বা সংক্ষেপে $\sec\theta$

$\frac{OP}{PM} = \frac{\text{অতিভুজ}}{\text{লম্ব}}$ = θ কোণের কোসেক্যান্ট (cosecant) বা সংক্ষেপে $\operatorname{cosec}\theta$

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের ধ্রুবতা

ওপরে বর্ণিত ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহ OA বাহুতে নির্বাচিত P বিন্দুর অবস্থানের ওপর নির্ভর করে না।



চিত্র– ২

$\angle XOA$ কোণের OA বাহুতে যেকোনো বিন্দু P ও P_1 থেকে OX বাহু পর্যন্ত যথাক্রমে PM ও P_1M_1 লম্ব অঙ্কন করলে POM ও P_1OM_1 দুইটি সদৃশ সমকোণী ত্রিভুজ গঠিত হয়।

এখন, ΔPOM ও ΔP_1OM_1 সদৃশ হওয়ায়,

$$\frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OP}{OP_1} \quad \text{বা,} \quad \frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1} \quad \text{.......................... (i)}$$

$$\frac{OM}{OM_1} = \frac{OP}{OP_1} \quad \text{বা,} \quad \frac{OM}{OP} = \frac{OM_1}{OP_1} \quad \text{.......................... (ii)}$$

$$\frac{PM}{P_1M_1} = \frac{OM}{OM_1} \quad \text{বা,} \quad \frac{PM}{OM} = \frac{P_1M_1}{OM_1} \quad \text{.......................... (iii)}$$

সুতরাং, $\angle XOA = \theta$ হলে, (i), (ii) ও (iii) থেকে দেখা যায় যে,

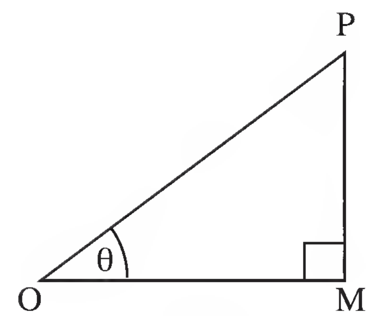
$$\sin\theta = \frac{PM}{OP} = \frac{P_1M_1}{OP_1}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM} = \frac{OP_1}{M_1P_1},$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP} = \frac{OM_1}{OP_1}, \quad \sec\theta = \frac{OP}{OM} = \frac{OP_1}{OM_1},$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM} = \frac{P_1M_1}{OM_1}, \quad \cot\theta = \frac{OM}{PM} = \frac{OM_1}{P_1M_1},$$

অর্থাৎ একই কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের প্রত্যেকটি ধ্রুবক।

ত্রিকোণমিতিক অনুপাতসমূহের সীমা



চিত্র- ৩

মনে করি, $\theta = \angle POM$ একটি সূক্ষ্মকোণ
এবং $PM \perp OM$

(i) θ কোণের প্রত্যেক ত্রিকোণমিতিক অনুপাত ΔPOM এর দুইটি বাহুর অনুপাত। সুতরাং এরূপ প্রত্যেক অনুপাত একটি ধনাত্মক বাস্তব সংখ্যা।

(ii) ΔPOM এ অতিভুজ OP বৃহত্তম বাহু।

সুতরাং $PM < OP$ এবং $OM < OP$

$\therefore \quad \dfrac{PM}{OP} < 1$ ও $\dfrac{OM}{OP} < 1.$

এবং $\dfrac{OP}{PM} > 1$ ও $\dfrac{OP}{OM} > 1.$

$\therefore \sin\theta < 1$ ও $\cos\theta < 1.$

এবং $\operatorname{cosec}\theta > 1$ ও $\sec\theta > 1.$

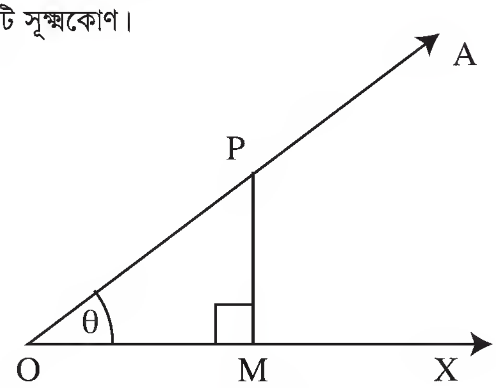
(iii) ΔPOM এ যেকোনো দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর। সুতরাং
$PM + OM > OP$

$\therefore \quad \dfrac{PM}{OP} + \dfrac{OM}{OP} > 1$ [উভয় পক্ষে OP দ্বারা ভাগ করে]

অর্থাৎ, $\sin\theta + \cos\theta > 1.$

১২.৩। ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর কতিপয় সম্পর্ক

মনে করি, $\theta = \angle XOA$ একটি সূক্ষ্মকোণ।



চিত্র- ৪

ওপরের চিত্র সাপেক্ষে, সংজ্ঞানুযায়ী,

$$\sin\theta = \frac{PM}{OP}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{OP}{PM}$$

$$\cos\theta = \frac{OM}{OP}, \quad \sec\theta = \frac{OP}{OM}$$

$$\tan\theta = \frac{PM}{OM}, \qquad \cot\theta = \frac{OM}{PM}$$

সুতরাং দেখা যায় যে,

(i) $\sin\theta.\ \mathrm{cosec}\theta = \frac{PM}{OP} \cdot \frac{OP}{PM} = 1$

$\therefore$ $\sin\theta = \frac{1}{\mathrm{cosec}\theta}$ এবং $\mathrm{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$

(ii) $\cos\theta.\ \sec\theta = \frac{OM}{OP} \cdot \frac{OP}{OM} = 1$

$\therefore$ $\cos\theta = \frac{1}{\sec\theta}$ এবং $\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}$

(iii) $\tan\theta.\ \cot\theta = \frac{PM}{OM} \cdot \frac{OM}{PM} = 1$

$\therefore$ $\tan\theta = \frac{1}{\cot\theta}$ এবং $\cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$

(iv) $\tan\theta = \frac{PM}{OM}$

$= \dfrac{\frac{PM}{OP}}{\frac{OM}{OP}}$ [লব ও হরকে OP দ্বারা ভাগ করে]

$\therefore \tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

এবং একইভাবে,

$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$

(v) $(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \left(\frac{PM}{OP}\right)^2 + \left(\frac{OM}{OP}\right)^2$

$$= \frac{PM^2}{OP^2} + \frac{OM^2}{OP^2}$$

$$= \frac{PM^2 + OM^2}{OP^2}$$

কিন্তু POM সমকোণী ত্রিভুজে OP অতিভুজ।
সুতরাং $OP^2 = PM^2 + OM^2$.
$\therefore (\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2 = \frac{OP^2}{OP^2} = 1$
বা, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

মন্তব্য। পূর্ণসংখ্যা সূচক n এর জন্য $(\sin\theta)^n$ কে $\sin^n\theta$, $(\cos\theta)^n$ কে $\cos^n\theta$ ইত্যাদি লেখা হয়।

(vi) $\sec^2\theta = (\sec\theta)^2 = \left(\frac{OP}{OM}\right)^2$

$$= \frac{OP^2}{OM^2}$$

$$= \frac{PM^2 + OM^2}{OM^2} \quad \text{[OP সমকোণী } \Delta POM \text{ এর অতিভুজ বলে]}$$

$$= \frac{PM^2}{OM^2} + \frac{OM^2}{OM^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{PM}{OM}\right)^2$$

$$= 1 + (\tan\theta)^2$$

$$= 1 + \tan^2\theta$$

$\therefore \sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta$

বা, $\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$.

(vii) $\operatorname{cosec}^2\theta = (\operatorname{cosec}\theta)^2 = \left(\frac{OP}{PM}\right)^2$

$$= \frac{OP^2}{PM^2}$$

$$= \frac{PM^2 + OM^2}{PM^2} \quad \text{[OP সমকোণী } \Delta POM \text{ এর অতিভুজ বলে]}$$

$$= \frac{PM^2}{PM^2} + \frac{OM^2}{PM^2}$$

$$= 1 + \left(\frac{OM}{PM}\right)^2$$

$$= 1 + (\cot\theta)^2$$

$$= 1 + \cot^2\theta$$

$\therefore \operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta = 1$.

১২.৪। কতিপয় উদাহরণ

উদাহরণ ১। প্রমাণ কর যে,

(i) $\dfrac{1}{1+\sin^2 A} + \dfrac{1}{1+\mathrm{cosec}^2 A} = 1;$

(ii) $\dfrac{1}{1+\cos^2 A} + \dfrac{1}{1+\sec^2 A} = 1;$

(iii) $\dfrac{1}{1+\tan^2 A} + \dfrac{1}{1+\cot^2 A} = 1;$

সমাধান :

(i) $$\frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\mathrm{cosec}^2 A} = \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{\sin^2 A}}$$

$$= \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{\sin^2 A}{1+\sin^2 A} = \frac{1+\sin^2 A}{1+\sin^2 A} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+\sin^2 A} + \frac{1}{1+\mathrm{cosec}^2 A} = 1$$

(ii) $$\frac{1}{1+\cos^2 A} + \frac{1}{1+\sec^2 A} = \frac{1}{1+\cos^2 A} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{\cos^2 A}}$$

$$= \frac{1}{1+\cos^2 A} + \frac{\cos^2 A}{1+\cos^2 A} = \frac{1+\cos^2 A}{1+\cos^2 A} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+\cos^2 A} + \frac{1}{1+\sec^2 A} = 1$$

(ii) $$\frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A} = \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\dfrac{1}{\tan^2 A}}$$

$$= \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = \frac{1+\tan^2 A}{1+\tan^2 A} = 1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1+\tan^2 A} + \frac{1}{1+\cot^2 A} = 1$$

উদাহরণ ২। প্রমাণ কর : $\dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$

সমাধান : $\dfrac{\cos A}{1-\tan A} + \dfrac{\sin A}{1-\cot A}$

$$= \frac{\cos A}{1-\dfrac{\sin A}{\cos A}} + \frac{\sin A}{1-\dfrac{\cos A}{\sin A}}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} + \frac{\sin^2 A}{\sin A - \cos A}$$

$$= \frac{\cos^2 A}{\cos A - \sin A} - \frac{\sin^2 A}{\cos A - \sin A}$$

$$= \frac{\cos^2 A - \sin^2 A}{\cos A - \sin A}$$

$$= \cos A + \sin A$$

$$\therefore \quad \frac{\cos A}{1-\tan A} + \frac{\sin A}{1-\cot A} = \sin A + \cos A$$

উদাহরণ ৩। প্রমাণ কর : $\tan\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = \sin\theta$

সমাধান : $\tan\theta\sqrt{1-\sin^2\theta}$

$$= \tan\theta\sqrt{\cos^2\theta}$$

$$= \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \times \cos\theta$$

$$= \sin\theta$$

$$\therefore \tan\theta\sqrt{1-\sin^2\theta} = \sin\theta$$

উদাহরণ ৪। দেখাও যে, $\dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1} = \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}$

সমাধান : $\dfrac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$

$$= \frac{\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta - (\operatorname{cosec}^2\theta - \cot^2\theta)}{\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1}$$

$$= \frac{(\cot\theta + \operatorname{cosec}\theta) - (\operatorname{cosec}\theta + \cot\theta)(\operatorname{cosec}\theta - \cot\theta)}{(\cot\theta - \operatorname{cosec}\theta + 1)}$$

$$= \frac{(\cot\theta + \text{cosec}\theta)\ (1 - \text{cosec}\theta + \cot\theta)}{(\cot\theta - \text{cosec}\theta + 1)}$$

$$= \frac{(\cot\theta + \text{cosec}\theta)\ (\cot\theta - \text{cosec}\theta + 1)}{(\cot\theta - \text{cosec}\theta + 1)}$$

$$= \cot\theta + \text{cosec}\theta$$

$$= \frac{\cos\theta}{\sin\theta} + \frac{1}{\sin\theta}$$

$$= \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$$

$$\therefore\ \frac{\cot\theta + \text{cosec}\theta - 1}{\cot\theta - \text{cosec}\theta + 1} = \frac{1 + \cos\theta}{\sin\theta}$$

উদাহরণ ৫। $\tan A + \sin A = m$ এবং $\tan A - \sin A = n$ হলে,
প্রমাণ কর যে, $m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}$

সমাধান : $4\sqrt{mn}$

$$= 4\sqrt{(\tan A + \sin A)(\tan A - \sin A)}$$

$$= 4\sqrt{(\tan^2 A - \sin^2 A)}$$

$$= 4\sqrt{\tan^2 A\left(1 - \frac{\sin^2 A}{\tan^2 A}\right)} = 4\sqrt{\tan^2 A\left(1 - \frac{\sin^2 A \times \cos^2 A}{\sin^2 A}\right)}$$

$$= 4\sqrt{(\tan^2 A)(1 - \cos^2 A)}$$

$$= 4\sqrt{(\tan^2 A \sin^2 A)}$$

$$= 4\ \tan A \sin A$$

$$= (\tan A + \sin A)^2 - (\tan A - \sin A)^2\ [4ab = (a+b)^2 - (a-b)^2]$$

$$= m^2 - n^2$$

$$\therefore\ m^2 - n^2 = 4\sqrt{mn}.$$

উদাহবণ ৬। $\sin A + \cos A = a$ এবং $\sec A + \text{cosec} A = b$ হলে,
প্রমাণ কর যে, $b(a^2 - 1) = 2a$.

সমাধান : $b(a^2 - 1)$

$$= (\sec A + \text{cosec} A)\{(\sin A + \cos A)^2 - 1\}$$

$$= \left(\frac{1}{\cos A} + \frac{1}{\sin A}\right) (\sin^2 A + \cos^2 A + 2\sin A\cos A - 1)$$

$$= \frac{\sin A + \cos A}{\sin A \cos A} . (1 + 2\sin A.\cos A - 1)$$

$$= \frac{\sin A + \cos A}{\sin A \cos A} . 2 \sin A \cos A$$

$$= 2(\sin A + \cos A)$$

$$= 2a$$

$\therefore$ $b (a^2 - 1) = 2a$

উদাহরণ ৭। প্রমাণ কর যে, $\sec\theta - \tan\theta = \sqrt{\dfrac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}}$

সমাধান : $\sec\theta - \tan\theta$

$$= \frac{1}{\cos\theta} - \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \frac{1 - \sin\theta}{\cos\theta}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \sin\theta)^2}{\cos^2\theta}} = \sqrt{\frac{(1 - \sin\theta)^2}{1 - \sin^2\theta}}$$

$$= \sqrt{\frac{(1 - \sin\theta)^2}{(1 + \sin\theta)(1 - \sin\theta)}} = \sqrt{\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}}$$

$$\therefore \sec\theta - \tan\theta = \sqrt{\frac{1 - \sin\theta}{1 + \sin\theta}}$$

উদাহরণ ৮। $\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A$ হলে,

প্রমাণ কর যে, $\cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A$

সমাধান : $\cos A + \sin A = \sqrt{2} \cos A$

বা, $\sin A = \sqrt{2} \cos A - \cos A$

বা, $\sin A = (\sqrt{2} - 1) \cos A$

বা, $\cos A = \dfrac{\sin A}{\sqrt{2} - 1} = \dfrac{(\sqrt{2} + 1) \sin A}{2 - 1}$

বা, $\cos A = (\sqrt{2} - 1) \sin A$

$\therefore$ $\cos A - \sin A = \sqrt{2} \sin A$ (পক্ষান্তর করে)।

অনুশীলনী–১২.১

দেখাও যে, প্রশ্ন (১–১৫)

1. (i) $\dfrac{1}{\sec^2 A} + \dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2 A} = 1$; (ii) $\dfrac{1}{\cos^2 A} - \dfrac{1}{\cot^2 A} = 1.$

2. (i) $\dfrac{\sin A}{\operatorname{cosec} A} + \dfrac{\cos A}{\sec A} = 1$; (ii) $\dfrac{\sec A}{\cos A} - \dfrac{\tan A}{\cot A} = 1.$

3. $\dfrac{\tan A}{1 - \cot A} + \dfrac{\cot A}{1 - \tan A} = \sec A.\ \operatorname{cosec} A + 1.$

4. $\dfrac{\tan^2 A}{1 + \tan^2 A} + \dfrac{\tan^2 A}{1 + \cot^2 A} = \sin^2 A \sec^2 A.$

5. $\dfrac{1}{2 - \sin^2\theta} + \dfrac{1}{2 + \tan^2\theta} = 1.$

6. $\dfrac{\sec A + \tan A}{\operatorname{cosec} A + \cot A} = \dfrac{\operatorname{cosec} A - \cot A}{\sec A - \tan A}$

7. $\dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A - 1} + \dfrac{\operatorname{cosec} A}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \sec^2 A.$

8. $\dfrac{1}{1 + \sin A} + \dfrac{1}{1 - \sin A} = 2 \sec^2 A.$

9. $\dfrac{1}{\operatorname{cosec} A - 1} - \dfrac{1}{\operatorname{cosec} A + 1} = 2 \tan^2 A.$

10. $\dfrac{\sin A}{1 - \cos A} + \dfrac{1 - \cos A}{\sin A} = 2 \operatorname{cosec} A.$

11. $\dfrac{\tan A}{\sec A + 1} - \dfrac{\sec A - 1}{\tan A} = 0\ .$

12. $(\tan\theta + \sec\theta)^2 = \dfrac{1 + \sin\theta}{1 - \sin\theta}$

13. $\dfrac{\cot A + \tan B}{\cot B + \tan A} = \cot A.\ \tan B.$

14. $\sqrt{\dfrac{1 - \sin A}{1 + \sin A}} = \sec A - \tan A.$

15. $\sqrt{\dfrac{\sec A + 1}{\sec A - 1}} = \cot A + \text{coese}A.$

16. যদি $\sin^2 A + \sin^4 A = 1$ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, $\tan^4 A - \tan^2 A = 1.$

17. যদি $\tan A = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ হয়, তবে $\dfrac{\text{cosec}^2 A - \sec^2 A}{\text{cosec}^2 A + \sec^2 A}$ এর মান নির্ণয় কর।

18. $\sec\theta + \tan\theta = \dfrac{5}{2}$ হলে, $\sec\theta - \tan\theta$ এর মান কত?

19. $\dfrac{\sin\theta + \cos\theta}{\sin\theta - \cos\theta} = 7$ হলে, $\tan\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

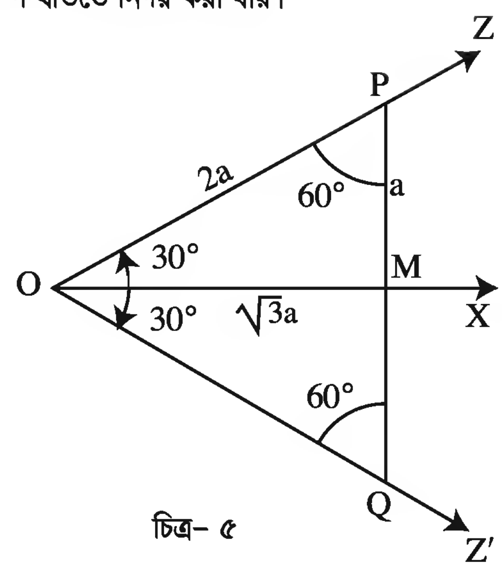
20. $\cot A = \dfrac{b}{a}$ হলে, $\dfrac{a \sin A - b \cos A}{a \sin A + b \cos A}$ এর মান নির্ণয় কর।

১২. ৫। 30°, 45° ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

কতকগুলো কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রকৃত মান জ্যামিতিক পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যায়। সেগুলো হল 30°, 45° ও 60° পরিমাপের কোণ।

30° ও 60° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, $\angle XOZ = 30°$ এবং OZ বাহুতে P একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি এবং PM কে Q পর্যন্ত বর্ধিত করি যেন $MQ = PM$ হয়। O, Q যোগ করি।
এখন ΔPOM ও ΔQOM এর মধ্যে $PM = QM$, OM সাধারণ বাহু এবং অন্তর্ভুক্ত $\angle PMO$ = অন্তর্ভুক্ত $\angle QMO$
$\therefore \Delta POM \cong \Delta QOM$
অতএব, $\angle QOM = \angle POM = 30°$
এবং $\angle OQM = \angle OPM = 60°$
$\therefore \Delta\ OPQ$ একটি সমবাহু ত্রিভুজ।



চিত্র– ৫

যদি $OP = 2a$ হয়, তবে $PM = \dfrac{1}{2} PQ = \dfrac{1}{2} OP = a$ [যেহেতু $PQ = OP$]

এবং $OM = \sqrt{OP^2 - PM^2}$

$= \sqrt{4a^2 - a^2} = \sqrt{3}a$

$\therefore \sin 30° = \dfrac{PM}{OP} = \dfrac{a}{2a} = \dfrac{1}{2}$

$\cos 30° = \dfrac{OM}{OP} = \dfrac{\sqrt{3}a}{2a} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$\tan 30^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\cot 30^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

$$\sec 30^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\operatorname{cosec} 30^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2.$$

আবার,

$$\sin 60^\circ = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{3}a}{2a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60^\circ = \frac{PM}{OP} = \frac{a}{2a} = \frac{1}{2}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{3}a}{a} = \sqrt{3}$$

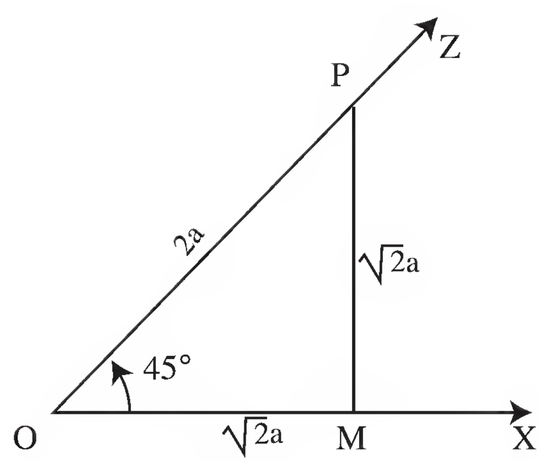
$$\cot 60^\circ = \frac{PM}{OM} = \frac{a}{\sqrt{3}a} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\sec 60^\circ = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{a} = 2$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{3}a} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

45° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, $\angle XOZ = 45^\circ$ এবং P, OZ এর ওপরস্থ একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি।



চিত্র–৬

ΔOPM সমকোণী ত্রিভুজে $\angle POM = 45^\circ$.

সুতরাং, $\angle OPM = 45^\circ$

অতএব, $PM = OM$

এখন, $OM^2 + PM^2 = OP^2$

বা, $2.\ OM^2 = OP^2$ [যেহেতু $PM = OM$]

বা, $OM^2 = \frac{1}{2} \cdot OP^2$

বা, $OM = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot OP$

যদি $OP = 2a$ হয়, তবে $PM = OM = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 2a = \sqrt{2}a$

$\therefore \sin 45° = \frac{PM}{OP} = \frac{\sqrt{2}a}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \cos 45° = \frac{OM}{OP} = \frac{\sqrt{2}a}{2a} = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\therefore \tan 45° = \frac{PM}{OM} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}a} = 1.$

$\therefore \cot 45° = \frac{OM}{PM} = \frac{\sqrt{2}a}{\sqrt{2}a} = 1.$

$\therefore \sec 45° = \frac{OP}{OM} = \frac{2a}{\sqrt{2}a} = \sqrt{2}.$

$\therefore \operatorname{cosec} 45° = \frac{OP}{PM} = \frac{2a}{\sqrt{2}a} = \sqrt{2}.$

১২.৬। পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

সংজ্ঞা। দুইটি সূক্ষ্মকোণের পরিমাপের সমষ্টি 90° হলে, তাদের একটিকে অপরটির পূরক কোণ বলা হয়। যেমন, 30° ও 60° কোণ, 15° ও 75° কোণ পরস্পরের পূরক কোণ।
সাধারণভাবে, θ কোণ ও $(90° - \theta)$ কোণ পরস্পরের পূরক কোণ।

পূরক কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

মনে করি, $\angle XOY = \theta$ এবং P এই কোণের OY বাহুর একটি বিন্দু। $PM \perp OX$ আঁকি।

যেহেতু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সমকোণ,

অতএব, POM সমকোণী ত্রিভুজে

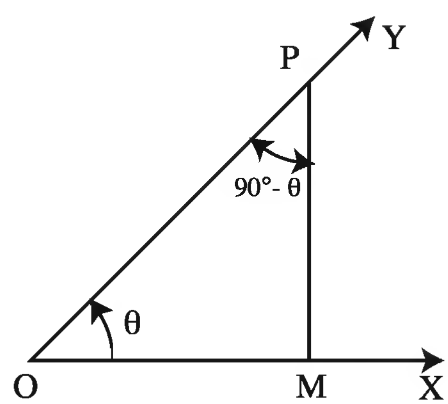
$\angle OPM + \angle POM =$ এক সমকোণ $= 90°$

$\therefore \angle OPM = 90° - \angle POM = 90° - \theta$

[যেহেতু $\angle POM = \angle XOY = \theta$]

$\therefore \sin (90° - \theta) = \frac{OM}{OP} = \cos POM = \cos\theta.$

$\cos (90° - \theta) = \frac{PM}{OP} = \sin POM = \sin\theta.$



চিত্র– ৭

$$\tan(90^\circ - \theta) = \frac{OM}{PM} = \cot POM = \cot\theta.$$
$$\cot(90^\circ - \theta) = \frac{PM}{OM} = \tan POM = \tan\theta.$$
$$\sec(90^\circ - \theta) = \frac{OP}{PM} = \text{cosec}\, POM = \text{cosec}\,\theta.$$
$$\text{cosec}(90^\circ - \theta) = \frac{OP}{OM} = \sec POM = \sec\theta.$$

ওপরের সূত্রগুলো নিম্নলিখিতভাবে কথায় প্রকাশ করা যায় :

পূরক কোণের sine = কোণের cosine;
পূরক কোণের cosine = কোণের sine;
পূরক কোণের tangent = কোণের cotangent, ইত্যাদি।

১২.৭। 90° ও 0° কোণের ত্রিকোণমিতিক অনুপাত

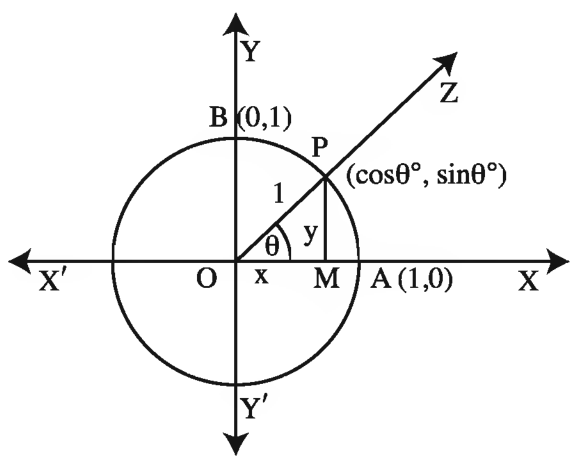
স্থানাঙ্কায়িত তলে $\angle XOZ$ বিবেচনা করি যার একবাহু OX ধনাত্মক X অক্ষ বরাবর এবং অপর বাহু OZ প্রথম (অর্থাৎ ধনাত্মক) চতুর্ভাগে অবস্থিত (চিত্র-৮)। $\angle XOZ$ এর পরিমাপ θ° হলে $\angle XOZ$ কে θ° কোণের প্রমিত অবস্থান (standard position) বলা হয়। এরূপ অবস্থানে OX রশ্মিকে এই কোণের আদি বাহু (initial side) এবং OZ রশ্মিকে প্রান্তীয় বাহু (terminal side) বলা হয়।

এখন, মূলবিন্দু O কে কেন্দ্র করে 1 একক ব্যাসার্ধ নিয়ে অঙ্কিত বৃত্ত OX রশ্মিকে A বিন্দুতে, OY রশ্মিকে B বিন্দুতে ও OZ রশ্মিকে P বিন্দুতে ছেদ করে।
$PM \perp OX$ আঁকি।
মনে করি, P এর স্থানাঙ্ক (x, y)।
তাহলে, পাশের চিত্রে, OP = 1,
OM = x, PM = y।

সুতরাং, $\cos\theta = \frac{OM}{OP} = x$

এবং $\sin\theta = \frac{PM}{OP} = y$।

এখানে দেখা যাচ্ছে যে,



চিত্র- ৮

সূত্র : θ° কোণের প্রমিত অবস্থানে তার প্রান্তীয় বাহুকে একক বৃত্ত (মূলবিন্দু কেন্দ্রিক এক একক ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্ত) যে বিন্দুতে ছেদ করে তার স্থানাঙ্ক হচ্ছে $(\cos\theta^\circ, \sin\theta^\circ)$।

ওপরে বর্ণিত সূত্রকে সম্প্রসারণ করে 0° ও 90° কোণের সাইন ও কোসাইন অনুপাত সংজ্ঞায়িত করা হয়।
(ক) আমরা লক্ষ করি যে, প্রমিত অবস্থানে 90° কোণের প্রান্তীয় বাহু OY অবস্থানে থাকে এবং একক বৃত্ত এই বাহুকে B বিন্দুতে ছেদ করে যার স্থানাঙ্ক (0, 1)। সুতরাং পূর্ব বর্ণিত সূত্রের সঙ্গে সামঞ্জস্য রেখে বলা হয় যে,

সংজ্ঞা : $\cos 90^\circ = 0$
$\sin 90^\circ = 1$

(খ) জ্যামিতিতে একই প্রান্তবিন্দু বিশিষ্ট দুইটি ভিন্ন রশ্মি দ্বারা একটি কোণ উৎপন্ন হয় এবং প্রত্যেক কোণের পরিমাপ ধনাত্মক সংখ্যা। ত্রিকোণমিতিতে আলোচনার সুবিধার্থে $0°$ কোণের অবতারণা করা হয় এবং প্রমিত অবস্থানে $0°$ কোণের প্রান্তীয় বাহু ও আদি বাহু একই রশ্মি OX ধরা হয়। যেহেতু একক বৃত্ত এই রশ্মিকে A বিন্দুতে ছেদ করে যার স্থানাঙ্ক $(1, 0)$ সুতরাং পূর্বে উল্লিখিত সূত্রের সঙ্গে সামঞ্জস্য রেখে বলা হয় যে,

সংজ্ঞা : $\cos 0° = 1$
$\sin 0° = 0$

θ সূক্ষ্মকোণ হলে আমরা দেখেছি (অনুচ্ছেদ ১২.৩ দ্রষ্টব্য) যে,

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}, \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta},$$
$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta}, \quad \operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}.$$

$0°$ ও $90°$ কোণের জন্যও সম্ভাব্য ক্ষেত্রে এ সম্পর্কগুলো যাতে বজায় থাকে সে দিকে লক্ষ রেখে বলা হয় যে,

সংজ্ঞা : $\tan 0° = 0$
$\sec 0° = 1$
$\cot 90° = 0$
$\operatorname{cosec} 90° = 1$

মন্তব্য : 0 দ্বারা ভাগ করা যায় না বিধায় $\operatorname{cosec} 0°$ ও $\cot 0°$ এবং $\tan 90°$ ও $\sec 90°$ সংজ্ঞায়িত করা হয় না।

দ্রষ্টব্য : ব্যবহারের সুবিধার্থে $0°, 30°, 45°, 60°$ ও $90°$ কোণগুলোর ত্রিকোণমিতিক অনুপাতগুলোর মান (যেগুলো সংজ্ঞায়িত) নিচের ছকে দেখানো হল :

কোণ / অনুপাত	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
sine	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cosine	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
tangent	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	অসংজ্ঞায়িত
cotangent	অসংজ্ঞায়িত	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
secant	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2	অসংজ্ঞায়িত
cosecant	অসংজ্ঞায়িত	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	1

লক্ষ করি : নির্ধারিত কয়েকটি কোণের জন্য ত্রিকোণমিতিক মানসমূহ মনে রাখার সহজ উপায় :

(i) 0, 1, 2, 3 এবং 4 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলের বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\sin 0°$, $\sin 30°$, $\sin 45°$, $\sin 60°$ এবং $\sin 90°$ এর মান পাওয়া যায়।

(ii) 4, 3, 2, 1 এবং 0 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 4 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\cos 0°$, $\cos 30°$, $\cos 45°$, $\cos 60°$ এবং $\cos 90°$ এর মান পাওয়া যায়।

(iii) 0, 1, 3 এবং 9 সংখ্যাগুলোর প্রত্যেকটিকে 3 দ্বারা ভাগ করে ভাগফলগুলোর বর্গমূল নিলে যথাক্রমে $\tan 0°$, $\tan 30°$, $\tan 45°$ এবং $\tan 60°$ এর মান পাওয়া যায়। (উল্লেখ্য যে, $\tan 90°$ সংজ্ঞায়িত নয়)।

১২.৮। কয়েকটি উদাহরণ

উদাহরণ ১। মান নির্ণয় কর : $\dfrac{1 - \cot^2 60°}{1 + \cot^2 60°}$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= \dfrac{1 - \cot^2 60°}{1 + \cot^2 60°}$

$$= \frac{1 - (\cot^2 60°)^2}{1 + (\cot^2 60°)^2} = \frac{1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2}{1 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \frac{1 - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{2}$$

উদাহরণ ২। মান নির্ণয় কর :

$\tan^2 45°. \sin 60°. \tan 30°. \tan^2 60°$

সমাধান : প্রদত্ত রাশি $= \tan^2 45°. \sin 60°. \tan 30°. \tan^2 60°$

$$= (1)^2 . \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{\sqrt{3}} . (\sqrt{3})^2$$

$$= 1 . \frac{\sqrt{3}}{2} . \frac{1}{\sqrt{3}} . 3 = \frac{3}{2}$$

উদাহরণ ৩। সমাধান কর : $\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

সমাধান : এখানে, $\dfrac{\cos A - \sin A}{\cos A + \sin A} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1}$

বা, $\dfrac{\cos A - \sin A + \cos A + \sin A}{\cos A - \sin A - \cos A - \sin A} = \dfrac{\sqrt{3} - 1 + \sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3} - 1}$ [যোজন বিয়োজন করে]

বা, $\dfrac{2\cos A}{-2\sin A} = \dfrac{2\sqrt{3}}{-2}$

বা, $\cot A = \sqrt{3} = \cot 30^\circ$

$\therefore\ A = 30^\circ$.

উদাহরণ ৪। সমাধান কর : $\tan^2\theta - (1 + \sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0.$

সমাধান : এখানে, $\tan^2\theta - (1 + \sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0.$

বা, $\tan^2\theta - \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta + \sqrt{3} = 0.$

বা, $\tan\theta(\tan\theta - 1) - \sqrt{3}(\tan\theta - 1) = 0.$

বা, $(\tan - 1)(\tan\theta - \sqrt{3}) = 0.$

$\therefore$ $\tan\theta - 1 = 0$ অথবা $\tan\theta - \sqrt{3} = 0$

$\therefore$ $\tan\theta = 1 = \tan 45^\circ$ অর্থাৎ, $\theta = 45^\circ$

অথবা $\tan\theta = \sqrt{3} = \tan 60^\circ$ অর্থাৎ, $\theta = 60^\circ$।

$\therefore$ $\theta = 45^\circ$ এবং 60° .

উদাহরণ ৫। দেখাও যে, $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A$, যদি $A = 30^\circ$ হয়।

সমাধান : বামপক্ষ $= \cos 3A = \cos 3.30^\circ = \cos 90^\circ = 0$

ডানপক্ষ $= 4\cos^3 A - 3\cos A$

$= 4\cos^3 30^\circ - 3\cos 30^\circ$

$= 4\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 - 3.\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$= 4 . \dfrac{3\sqrt{3}}{8} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3\sqrt{3}}{2} - \dfrac{3\sqrt{3}}{2} = 0.$

$\therefore$ বামপক্ষ = ডানপক্ষ।

$\therefore$ $\cos 3A = 4\cos^3 A - 3\cos A.$

অনুশীলনী–১২.২

দেখাও যে, (১–৭)

1. $\cos^2 30° - \sin^2 30° = \cos 60°$.

2. $\sin 60° \cos 30° + \cos 60° \sin 30° = \sin 90°$

3. $\cos 60° \cos 30° + \sin 60° \sin 30° = \cos 30°$

4. $\sin 3A = \cos 3A$, যদি $A = 15°$ হয়।

5. $\sin 2A = \dfrac{2\tan A}{1 + \tan^2 A}$, যদি $A = 30°$ হয়।

6. $\tan 2A = \dfrac{2\tan A}{1 - \tan^2 A}$, যদি $A = 30°$ হয়।

7. $\cos 2A = \dfrac{1 - \tan^2 A}{1 + \tan^2 A}$, যদি $A = 45°$ হয়।

8. $2\cos (A+B) = 1 = 2\sin (A-B)$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে দেখাও যে, $A = 45°$, $B = 15°$।

9. $\sqrt{2} \cos (A - B) = 1$, $2 \sin (A + B) = \sqrt{3}$ এবং A, B সূক্ষ্মকোণ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

10. A ও B সূক্ষ্মকোণ এবং $\cot (A+B) = 1$, $\cot (A - B) = \sqrt{3}$ হলে, A ও B এর মান নির্ণয় কর।

11. সমাধান কর : $\sin\theta + \cos\theta = 1$, যখন $0° \leq \theta \leq 90°$

12. সমাধান কর : $\cos^2\theta - \sin^2\theta = 2 - 5\cos\theta$, যখন θ সূক্ষ্মকোণ।

13. সমাধান কর : $2\cos^2\theta + 3\sin\theta - 3 = 0$, θ সূক্ষ্মকোণ।

14. দেখাও যে, $3\tan^2 30° + \frac{1}{4} \sec 60° + 5\cot^2 45° - \frac{2}{3} \sin^2 60° = 6$.

15. মান নির্ণয় কর : $3\cot^2 60° + \frac{1}{4} \operatorname{cosec} 30° + 5 \sin^2 45° - 4\cos^2 60°$.

১২.৯। দূরত্ব ও উচ্চতাবিষয়ক সমস্যা

অতি প্রাচীন কাল থেকেই দূরবর্তী কোনো বস্তুর দূরত্ব ও উচ্চতা নির্ণয় করতে ত্রিকোণমিতিক অনুপাতের প্রয়োগ করা হয়। বর্তমান যুগেও এর গুরুত্ব অপরিসীম। যেসব পাহাড় ও পর্বতের উচ্চতা বা নদ-নদীর প্রস্থ সহজে মাপা যায় না, সেসব ক্ষেত্রে উচ্চতা বা প্রস্থ ত্রিকোণমিতির সাহায্যে নির্ণয় করা যায়। এজন্য কোণের পরিমাপগুলো জেনে রাখা খুবই প্রয়োজন। 'সেক্সট্যান্ট' নামক যন্ত্র ব্যবহার করে কোণ মাপা যায়।

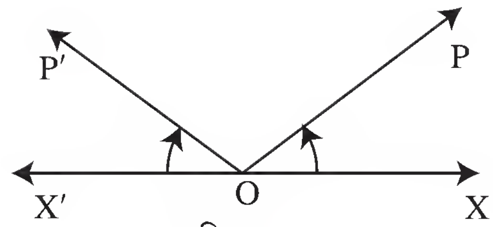
ভূ–রেখা ও ঊর্ধ্বরেখা এবং উল্লম্ব তল

ভূ–রেখা হচ্ছে ভূমি তলে অবস্থিত যেকোনো সরলরেখা। ভূ–রেখাকে শয়নরেখাও বলা হয়।
আবার, ঊর্ধ্বরেখা হচ্ছে ভূমি তলের ওপর লম্ব যেকোনো সরলরেখা। একে উল্লম্ব রেখাও বলা হয়।
ভূমি তলের ওপর লম্বভাবে অবস্থিত পরস্পরচ্ছেদী ভূ–রেখা ও ঊর্ধ্বরেখা একটি তল নির্দিষ্ট করে। এ তলকে উল্লম্ব তল বলা হয়।

উন্নতি কোণ ও অবনতি কোণ :

মনে করি, ভূ–রেখার সমান্তরাল রেখা XOX'. চিত্রে O, P, X বিন্দুগুলো একই উল্লম্ব তলে অবস্থিত এবং P বিন্দু XOX' রেখার ওপরের দিকে অবস্থিত। তাহলে, O বিন্দুতে P বিন্দুর উন্নতি কোণ হচ্ছে $\angle POX$.

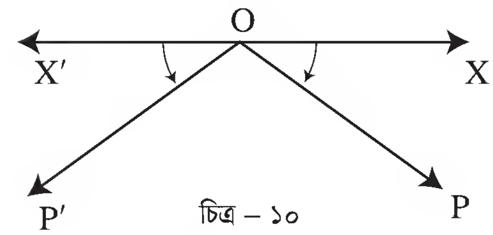
অনুরূপভাবে, O বিন্দুতে P' বিন্দুর উন্নতি কোণ হচ্ছে $\angle P'OX'$.



চিত্র – ৯

চিত্রে, O, P, X বিন্দুগুলো একই উল্লম্ব তলে অবস্থিত এবং P বিন্দু ভূ–রেখার সমান্তরাল রেখা XOX' রেখার নিচের দিকে অবস্থিত। তাহলে, O বিন্দুতে P বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে $\angle POX$.

অনুরূপভাবে, O বিন্দুতে P' বিন্দুর অবনতি কোণ হচ্ছে $\angle P'OX'$



চিত্র – ১০

উচ্চতা ও দূরত্ব সংক্রান্ত কয়েকটি উদাহরণ

উদাহরণ ১। একটি মিনারের পাদদেশ থেকে 30 মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে মিনারের চূড়ার উন্নতি কোণ $60°$ হলে, মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, মিনারটির পাদবিন্দু P, ভূতলের নির্দিষ্ট বিন্দু O এবং মিনারের চূড়া A.

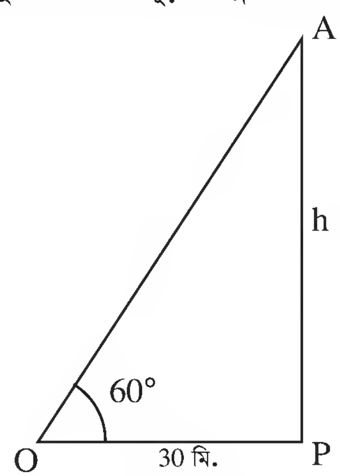
সুতরাং, $\angle POA = 60°$ এবং $PO = 30$ মিটার।
মনে করি, মিনারের উচ্চতা $AP = h$ মিটার।

এখানে, $\tan \angle POA = \dfrac{AP}{OP}$

বা, $\tan 60° = \dfrac{h}{30}$ বা, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{30}$

বা, $h = 30\sqrt{3} = 51{\cdot}962$

$\therefore$ মিনারের উচ্চতা $= 51{\cdot}962$ মিটার।



চিত্র – ১১

উদাহরণ ২। একটি গাছের পাদদেশ থেকে কিছু দূরে একটি স্থানে গাছটির শীর্ষের উন্নতি কোণ $30°$। গাছটি 26 মিটার উঁচু হলে, ঐ স্থানটি গাছটি থেকে কত দূরে?

সমাধান : মনে করি, গাছটির পাদবিন্দু B, ভূতলের নির্দিষ্ট স্থান O এবং শীর্ষবিন্দু A. মনে করি, গাছটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব $BO = x$ মিটার।

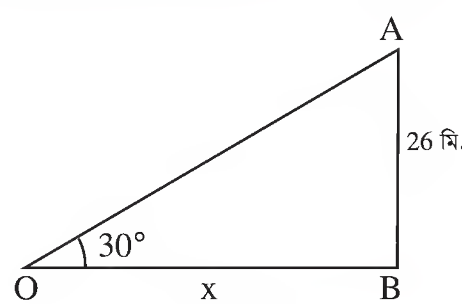
$\therefore \angle AOB = 30°$ এবং $BA = 26$ মিটার।

এখন, $\tan \angle AOB = \dfrac{AB}{OB}$

বা, $\tan 30° = \dfrac{26}{x}$ বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{26}{x}$

বা, $x = 26\sqrt{3} = 45{\cdot}033$

$\therefore$ গাছটি থেকে নির্দিষ্ট স্থানের দূরত্ব $45{\cdot}033$ মিটার।



চিত্র – ১২

উদাহরণ ৩। 18 মিটার দীর্ঘ একটি মই ভূমির সাথে $45°$ কোণ উৎপন্ন করে দেওয়ালের ছাদ স্পর্শ করে। দেওয়ালটির উচ্চতা কত?

সমাধান : মনে করি, ছাদের স্পর্শবিন্দু B এবং দেওয়ালের উচ্চতা $AB = h$ মিটার।

মইয়ের দৈর্ঘ্য $OB = 18$ মিটার এবং $\angle AOB = 45°$

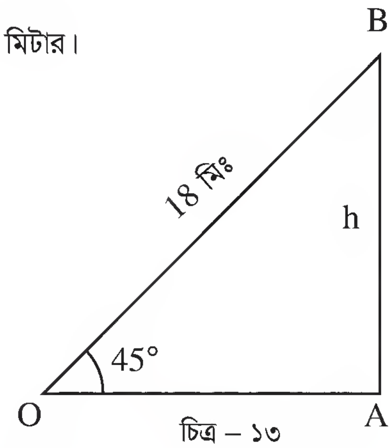
এখন, $\sin \angle AOB = \dfrac{AB}{OB}$

বা, $\sin 45° = \dfrac{h}{18}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{h}{18}$

বা, $h = \dfrac{18}{\sqrt{2}} = \dfrac{18 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = 12{\cdot}728$

$\therefore$ দেওয়ালটির উচ্চতা $= 12{\cdot}728$ মিটার।



চিত্র – ১৩

উদাহরণ ৪। একটি নদীর তীরে কোনো এক স্থানে দাঁড়িয়ে একজন লোক দেখলো যে, ঠিক সোজাসুজি অপর তীরে অবস্থিত একটি স্তম্ভের উন্নতি কোণ $60°$। ঐ স্থান থেকে 25 মিটার পিছিয়ে গিয়ে দেখলো যে, স্তম্ভটির উন্নতি কোণ $30°$ হয়েছে। স্তম্ভটির উচ্চতা ও নদীর বিস্তার নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, স্তম্ভটির উচ্চতা $AB = h$ মিটার এবং নদীর প্রস্থ $BP = x$ মিটার।

এখানে, $\angle BPA = 60°$, $\angle BOA = 30°$ এবং $OP = 25$ মিটার।

$\therefore BO = (BP + PO) = (x + 25)$ মিটার

এখন, $\tan \angle AOB = \dfrac{AB}{OB}$

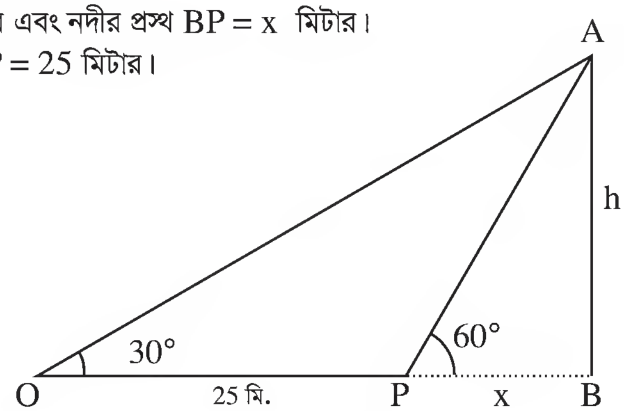
বা, $\tan 30° = \dfrac{h}{x + 25}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{x + 25}$

বা, $x + 25 = h\sqrt{3}$ .... (i)

আবার, $\tan \angle BPA = \dfrac{AB}{BP}$

বা, $\tan 60° = \dfrac{h}{x}$ বা, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$ বা, $h = x\sqrt{3}$ .... (ii)



চিত্র – ১৪

সুতরাং, (i) ও (ii) থেকে আমরা পাই,

$x + 25 = x\sqrt{3} \cdot \sqrt{3}$

বা, $x + 25 = 3x$ বা, $2x = 25$

বা, $x = \dfrac{25}{2} = 12\dfrac{1}{2} = 12{\cdot}5$

$\therefore h = x\sqrt{3} = \dfrac{25\sqrt{3}}{2} = 21{\cdot}651$

$\therefore$ স্তম্ভটির উচ্চতা $= 21{\cdot}651$ মিটার এবং নদীর বিস্তার $= 12{\cdot}5$ মিটার।

উদাহরণ ৫। দুইটি কিলোমিটার পোস্টের মধ্যবর্তী কোনো স্থানের ওপরে একটি হেলিকপ্টার থেকে ঐ কিলোমিটার পোস্ট দুইটির অবনতি যথাক্রমে 60° ও 30° হলে, হেলিকপ্টারটির উচ্চতা কত ?

সমাধান : মনে করি, O হেলিকপ্টারের অবস্থান এবং A ও B এক কিলোমিটার দূরবর্তী দুইটি পোস্টের চূড়া। O থেকে A ও B এর অবনতি কোণ যথাক্রমে 60° ও 30°।
অতএব, $\angle A'OA = 60^\circ$ ও $\angle B'OB = 30^\circ$, $A'B'$ ও AB সমান্তরাল বলে
$\angle A'OA = \angle OAB = 60^\circ$ ও $\angle B'OB = \angle OBA = 30^\circ$। এখানে $AB = 1000$ মিটার।
O থেকে AB এর ওপর লম্ব OP অঙ্কন করি।

মনে করি, $AP = x$ মিটার, $OP = h$ মিটার।
অতএব, $BP = (1000 - x)$ মিটার।

এখন, $\tan \angle OAP = \dfrac{OP}{AP}$

বা, $\tan 60^\circ = \dfrac{OP}{AP}$

বা, $\sqrt{3} = \dfrac{h}{x}$

বা, $\sqrt{3}x = h$

আবার, $\tan \angle OBP = \dfrac{OP}{BP}$

বা, $\tan 30^\circ = \dfrac{h}{1000 - x}$

বা, $\dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{h}{1000 - x}$

বা, $1000 - x = \sqrt{3}h.$

সুতরাং, $1000 - x = \sqrt{3} . \sqrt{3}x$

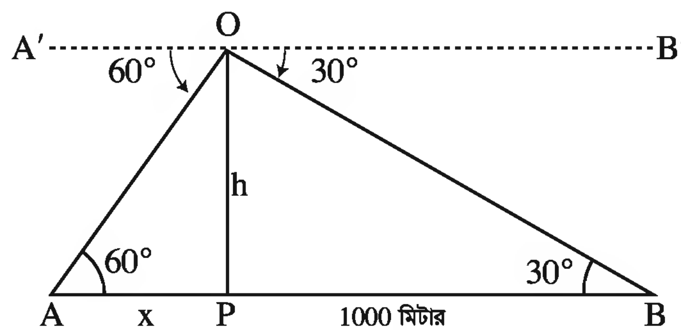
বা, $1000 - x = 3x$

বা, $4x = 1000$

বা, $x = 250$

$\therefore\ h = \sqrt{3}x = \sqrt{3} \times 250 = 433{\cdot}013$

$\therefore$ নির্ণেয় উচ্চতা $= 433{\cdot}013$ মিটার।



চিত্র – ১৫

অনুশীলনী–১২.৩

[উত্তর আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত উল্লেখ করতে হবে]

১। একটি মিনারের পাদদেশ থেকে 20 মিটার দূরে ভূতলের কোনো বিন্দুতে মিনারের চূড়ার উন্নতি কোণ 60° হলে, মিনারটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

২। একটি লম্বা গাছের পাদদেশ থেকে 90 মিটার দূরে ভূমির একটি বিন্দুতে গাছটির শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 30°, গাছটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

৩। একটি নদীর এক তীরে অবস্থিত কোনো বিন্দুতে অপর তীরে অবস্থিত 150 মিটার উঁচু একটি গাছের শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 60°; নদীটির প্রস্থ কত ?

৪। সূর্যের উন্নতি কোণ 60° হলে মিনারের ছায়ার দৈর্ঘ্য 240 মিটার। মিনারটির উচ্চতা কত ?

৫। একটি মিনারের শীর্ষবিন্দুতে ঐ বিন্দু থেকে 15 মিটার দূরের ভূতলস্থ একটি বিন্দুর অবনতি কোণ 45° হলে, মিনারটির উচ্চতা কত ?

৬। ভূতলস্থ কোনো স্থানে একটি দালানের ছাদের কোনো বিন্দুর উন্নতি কোণ 30°. ঐ স্থান থেকে দালানের দিকে 60 মিটার এগিয়ে গেলে ঐ বিন্দুর উন্নতি কোণ 45° হয়। দালানটির উচ্চতা নির্ণয় কর।

৭। ভূতলে একটি টাওয়ারের ছায়া 24 মিটার বেশি লম্বা হয় যদি সূর্যের উন্নতি কোণ 60° থেকে 45° হয়। টাওয়ারের উচ্চতা কত ?

৮। একটি 48 মিটার লম্বা খুঁটি ভেঙে গিয়ে সম্পূর্ণভাবে বিচ্ছিন্ন না হয়ে ভূমির সাথে 30° কোণ উৎপন্ন করল। খুঁটিটি কত উঁচুতে ভেঙে ছিল ?

৯। একটি গাছ ঝড়ে এমনভাবে ভেঙে গেল যে তার ভাঙা অংশ দণ্ডায়মান অংশের সাথে 30° কোণ করে গাছের গোড়া থেকে 10 মিটার দূরে মাটি স্পর্শ করে। গাছটির সম্পূর্ণ দৈর্ঘ্য কত ছিল ?

১০। কোনো স্থান থেকে একটি মিনারের দিকে 60 মিটার এগিয়ে আসলে তার শীর্ষবিন্দুর উন্নতি কোণ 45° থেকে 60° হয়। মিনারটির উচ্চতা কত ?

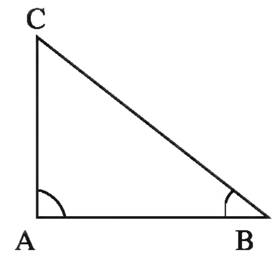
ত্রিকোণমিতি

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। পাশের চিত্রটি একটি বাগানের আনুপাতিক চিত্র :

যেখানে, $\angle A = 90^0$ এবং $\angle B = \theta$ ।

নিচের কোন অনুপাতটি $\tan\theta$ এর সমান ?



ক. $\frac{AB}{AC}$ খ. $\frac{AB}{BC}$

গ. $\frac{AC}{AB}$ ঘ. $\frac{BC}{AB}$

২। একটি পতাকার খুঁটি ভেঙ্গে, ভাঙ্গা অংশ ভূমির সাথে 30^0 কোণ উৎপন্ন করে। খুঁটির ভাঙ্গা অংশের দৈর্ঘ্য 16 মিটার হলে, দণ্ডায়মান অংশের দৈর্ঘ্য কত মিটার?

ক. 8 খ. $8\sqrt{3}$

গ. 16 ঘ. $16\sqrt{3}$

৩। একটি সমকোণী ত্রিভুজ আকৃতির লোহার পাতের সমকোণ সংলগ্ন বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6 সে.মি. ও 8 সে.মি.। 6 সে.মি. দৈর্ঘ্যের বাহুর বিপরীত কোণ θ হলে, $\cot\theta$ এর মান–

ক $\frac{3}{4}$ খ. $\frac{4}{3}$

গ. $\frac{4}{5}$ ঘ. $\frac{5}{3}$

৪। নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক?

ক. $\sin\theta + \cos\theta = 1$

খ. $\cos\theta + \sin\theta > 1$

গ. $\tan^2\theta - \sec^2\theta = 1$

ঘ. $\sin^2\theta + \cos^2\theta < 1$

৫। নিম্নোক্ত সম্পর্কগুলো লক্ষ কর :

i. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

ii. $\sec\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$

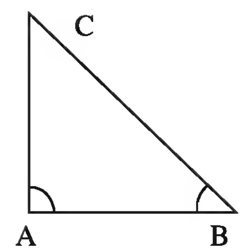
iii. $\cos\theta + \sin\theta > 1$

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i এবং ii খ. i এবং iii

গ. ii এবং iii ঘ. i, ii এবং iii

৬। পাশের চিত্রে, $\angle A = 90^0$
এবং $\angle B = 60^0$, যেখানে



i. $\tan 60^0 = \frac{CA}{AB}$

ii. $Cosec^2 60^0 - Cot^2 60^0 = 1$

iii. $Sin 60^0 = Cos 60^0$

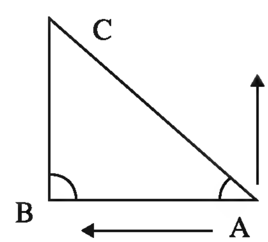
ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক ?

ক. i　　খ. ii

গ. ii এবং iii　　ঘ. i এবং iii

নিচের তথ্যের ভিত্তিতে (৭- ৯) নং প্রশ্নের উত্তর দাও।

পাশের চিত্রে, এক ব্যক্তি A বিন্দু হতে সোজা পশ্চিম দিকে $\sqrt{3}$ কি.মি. অতিক্রম করে B বিন্দুতে পৌঁছে এবং B বিন্দু হতে সোজা উত্তর দিকে 1 কি.মি. অতিক্রম করে C বিন্দুতে পৌঁছে। যেখানে $\angle BAC = \theta$ |



৭। নিচের কোনটি $Cos\theta$এর মান নির্দেশ করে ?

ক. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

খ. $\frac{\sqrt{3}}{2}$

গ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

ঘ. $\frac{1}{2}$

৮। AC এর দৈর্ঘ্য কত কি.মি. ?

ক. 1　　খ. $\sqrt{3}$

গ. 2　　ঘ. 4

৯। নিচের কোন সম্পর্কটি সঠিক ?

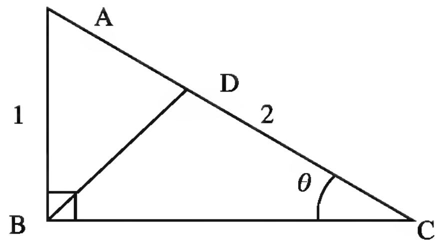
ক. $Sin\ \theta - Cos\ \theta = \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3})$

খ. $Sec\ \theta + Sin\ \theta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$

গ. $Sin\ \theta + Cos\ \theta = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})$

ঘ. $Sec\ \theta - Sin\ \theta = (1-\sqrt{3})$

সৃজনশীল প্রশ্ন



ওপরের চিত্রটি আমাদের বিদ্যালয়ের অফিসের সামনের বাগানের আনুপাতিক চিত্র। BD হল বাগানের মাঝ দিয়ে একটি রাস্তা, যেখানে $AB \perp BC$ এবং $BD \perp AC$ ।

ক. $\sin\theta$ ও $\cos\theta$ এর মান নির্ণয় কর।

খ. দেখাও যে, $AC^2 - AB^2 = 4BD^2$ ·

গ. AD এর মান ব্যবহার করে $\angle BAC$ ও $\angle BCA$ এর মান নির্ণয় কর এবং তা হতে $\sin\angle BAC = \cos\angle BCA$ এর সত্যতা যাচাই কর।

২। ঝড়ে একটি খুঁটি ভেঙ্গে ভাঙ্গা অংশ ভূমির সাথে θ কোণ উৎপন্ন করে ভূমি স্পর্শ করে।

ক. উপরোক্ত বর্ণনাটি চিত্রের সাহায্যে উপস্থাপন কর এবং ভাঙ্গা অংশ ও দন্ডায়মান অংশ নির্ণয় কর।

খ. জ্যামিতিক উপায়ে $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ সূত্রটি প্রতিপাদন কর।

গ. $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ সূত্রটি ব্যবহার করে $(\sec\theta + \tan\theta)^2 = \dfrac{1+\sin\theta}{1-\cos\theta}$ সমীকরণের সত্যতা যাচাই কর।

ত্রয়োদশ অধ্যায়

পরিমিতি

১৩.১। একক ও পরিমাপ

ব্যবহারিক প্রয়োজনে "রেখার দৈর্ঘ্য", "তলের ক্ষেত্রফল", "ঘনবস্তুর আয়তন" ইত্যাদি পরিমাপন করা হয়। এ রকম যেকোনো রাশির পরিমাপনে একই জাতীয় নির্দিষ্ট পরিমাণের একটি রাশিকে একক হিসেবে গ্রহণ করা হয়। পরিমাপকৃত রাশি এবং এরূপ নির্ধারিত এককের অনুপাতই রাশিটির পরিমাপ নির্ধারণ করে।

অর্থাৎ, $\dfrac{\text{পরিমাপকৃত রাশি}}{\text{একক রাশি}} = \text{পরিমাপ}$।

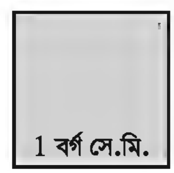
লক্ষণীয় যে, নির্ধারিত একক সাপেক্ষে প্রত্যেক পরিমাপ একটি সংখ্যা যা পরিমাপকৃত রাশিটির একক রাশির কতগুণ তা নির্দেশ করে। যেমন, আমরা যখন বলি টেবিলটি 3 মিটার লম্বা, তখন বুঝতে হবে যে মিটার একটি নির্দিষ্ট দৈর্ঘ্য যাকে একক হিসেবে ধরা হয়েছে এবং যার তুলনায় টেবিলটি 3 গুণ লম্বা।

রৈখিক পরিমাপ

দৈর্ঘ্য পরিমাপনে সাধারণত মিটার ও তা থেকে উদ্ভূত এককসমূহ ব্যবহার করা হয়। ফুট, হাত ইত্যাদি এককও ব্যবহৃত হয়।

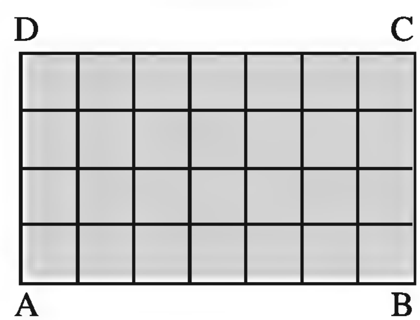
ক্ষেত্র পরিমাপ

রৈখিক এককের ওপর নির্ভর করে ক্ষেত্রফল পরিমাপনের একক নির্ধারণ করা হয়। যে বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 1 একক (যেমন, 1 সে.মি.) তার ক্ষেত্রফল 1 বর্গ একক (যেমন, 1 বর্গ সে.মি.) ধরা হয় এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয়ে একে একক হিসেবে ব্যবহার করা হয়।



১৩.২। কয়েকটি সরল রৈখিক ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

(ক) আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :

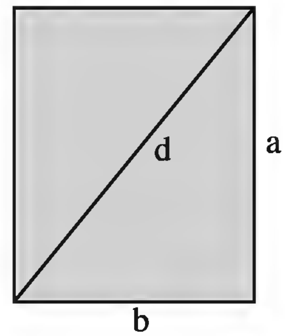


মনে করি, ABCD একটি আয়তক্ষেত্র যার দৈর্ঘ্য AB = 7 মি. এবং প্রস্থ AD = 4 মি.। AB ও AD কে যথাক্রমে 7 টি ও 4 টি সমান অংশে বিভক্ত করি যেন প্রতিটি অংশের দৈর্ঘ্য 1 মি. হয়। বিভাগ বিন্দুগুলো দিয়ে যথাক্রমে AB ও AD এর সমান্তরাল রেখা টানি। এতে আয়তক্ষেত্রটি মোট (7×4) টি সমান বর্গক্ষেত্রে বিভক্ত হয়। এখানে প্রত্যেকটি বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার। সুতরাং প্রত্যেকটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 1 বর্গ মি.।

অতএব আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল

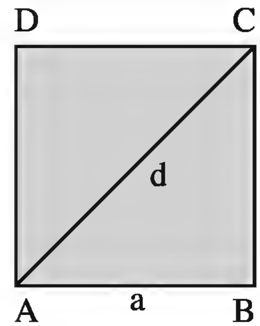
$= (7 \times 4)$ বর্গ মি. $= 28$ বর্গ মি.।

সাধারণভাবে বলা যায় যে,
কোনো আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য a একক ও প্রস্থ b একক হলে,
আয়তক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল $A = a \times b$ বর্গ একক।
লক্ষণীয় যে, আয়তক্ষেত্রটির পরিসীমা $s = 2(a + b)$ একক
এবং আয়তক্ষেত্রটির কর্ণ $d = \sqrt{a^2 + b^2}$ একক।



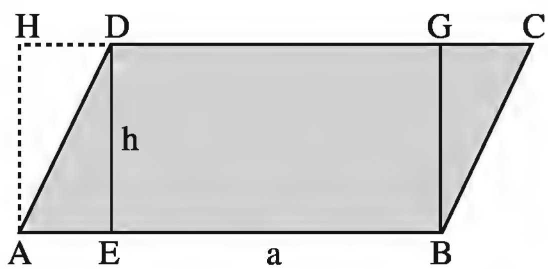
(খ) বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :

মনে করি, ABCD বর্গক্ষেত্রটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য = a একক।
তাহলে, বর্গক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল = a^2 বর্গ একক।
লক্ষণীয় যে, বর্গক্ষেত্রটির পরিসীমা $s = 4a$ একক
এবং বর্গক্ষেত্রটির কর্ণ $d = \sqrt{a^2 + a^2}$ একক
$= \sqrt{2}a$ একক।



(গ) সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :

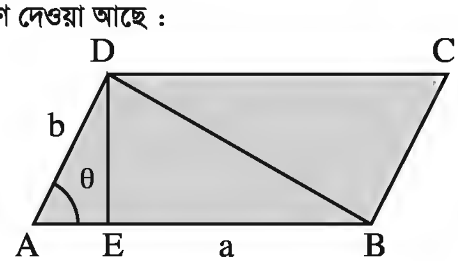
(১) সামান্তরিকক্ষেত্রের ভূমি ও উচ্চতা দেওয়া আছে :
মনে করি, ABCD সামান্তরিকের ভূমি AB = a একক এবং উচ্চতা DE = h একক।
A ও B থেকে CD রেখা পর্যন্ত লম্ব এঁকে ABGH আয়তক্ষেত্র বিবেচনা করি। সামান্তরিক ক্ষেত্র ABCD ও আয়তক্ষেত্র ABGH একই ভূমির ওপর এবং একই সমান্তরাল যুগলের মধ্যে অবস্থিত হওয়ায় তাদের ক্ষেত্রফল সমান।



∴ সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল
= আয়তক্ষেত্র ABGH এর ক্ষেত্রফল
= $AB \times BG$ বর্গ একক
= $AB \times DE$ বর্গ একক (যেহেতু $BG = DE$)
= ah বর্গ একক।
এই সূত্রটিকে এভাবে বর্ণনা করা যায়,
সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = ক্ষেত্রটির ভূমি × ক্ষেত্রটির উচ্চতা।

(২) সামান্তরিকক্ষেত্রের দুইটি সন্নিহিত বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে :

মনে করি, ABCD সামান্তরিকের AB = a একক,
AD = b একক এবং $\angle DAB = \theta°$
D বিন্দু থেকে AB এর ওপর DE লম্ব অঙ্কন করি।
সুতরাং ABCD সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
= $AB \times DE$ বর্গ একক
= $AB \times AD \sin \angle DAB$ বর্গএকক। [যেহেতু $DE = AD \sin \angle DAB$]
= $ab \sin\theta°$ বর্গ একক [যেহেতু $\angle DAB = \theta°$]



(ঘ) ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :

(১) ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতা দেওয়া আছে :

মনে করি, ΔABC এর ভূমি BC = a একক এবং উচ্চতা AD = h একক।

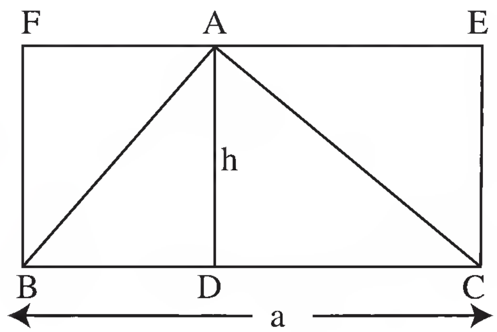
ত্রিভুজের ভূমি ও উচ্চতার সমান আয়তক্ষেত্রের সন্নিহিত বাহু ধরে BCEF আয়তক্ষেত্রটি অঙ্কন করি।
আমরা জানি, Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times$ BCEF আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} \times BC \times EC$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} BC \times AD$ বর্গ একক (যেহেতু $EC = AD$)

$= \frac{1}{2} ah$ বর্গ একক



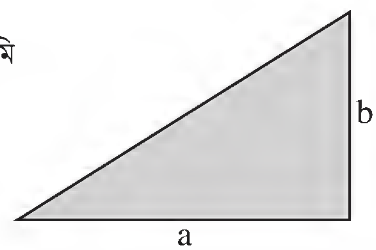
এ সূত্রটিকে এভাবে বর্ণনা করা যায়,

ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা।

মন্তব্য। সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন বাহু দুইটির একটিকে ভূমি ধরলে অপরটিকে বলা হয় উচ্চতা।

$\therefore$ সমকোণী ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ ভূমি $\times$ উচ্চতা

$= \frac{1}{2} ab$ বর্গ একক।



(২) ত্রিভুজক্ষেত্রের দুই বাহু ও তাদের অন্তর্ভুক্ত কোণ দেওয়া আছে :

মনে করি, ABC একটি ত্রিভুজ। A থেকে BC বাহুর ওপর AD লম্ব অঙ্কন করি।

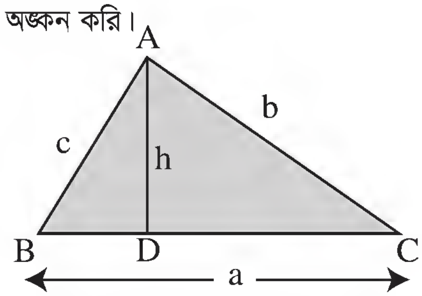
ত্রিভুজের উচ্চতা AD $(h) = AC \sin C = b \sin C$

Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$

$= \frac{1}{2} ab \sin C$

অনুরূপভাবে, Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল

$= \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} ac \sin B.$



(৩) ত্রিভুজের তিন বাহু দেওয়া আছে :

উল্লেখ্য যে, একটি ত্রিভুজের তিন বাহুর দৈর্ঘ্যের যোগফলকে এর পরিসীমা বলা হয়। ত্রিভুজের পরিসীমাকে $2s$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

মনে করি, ΔABC এর $BC = a$, $CA = b$ এবং $AB = c$.
শীর্ষবিন্দু A থেকে ভূমি BC এর ওপর AD লম্ব অঙ্কন করি।

মনে করি, $BD = x$, তাহলে, $CD = a - x$.
এখন ΔABD ও ΔACD থেকে পাই,

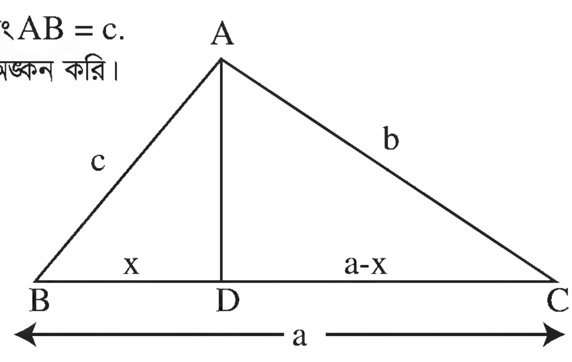
$AD^2 = AB^2 - BD^2$

$= AC^2 - CD^2$

বা, $c^2 - x^2 = b^2 - (a-x)^2$

বা, $2ax = c^2 + a^2 - b^2$

$\therefore x = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}$



আবার, $AD^2 = c^2 - x^2$

$$= c^2 - \left(\frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)^2$$

$$= \left(c + \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)\left(c - \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2a}\right)$$

$$= \frac{\{(a+c)^2 - b^2\}\{b^2 - (a-c)^2\}}{4a^2}$$

$$= \frac{(a+b+c)(a+c-b)(a+b-c)(b+c-a)}{4a^2}$$

$$= \frac{2s(2s-2b)(2s-2c)(2s-2a)}{4a^2}$$ [যেহেতু $2s = a+b+c$]

$$= \frac{4s(s-a)(s-b)(s-c)}{a^2}$$

$$\therefore AD = \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$$

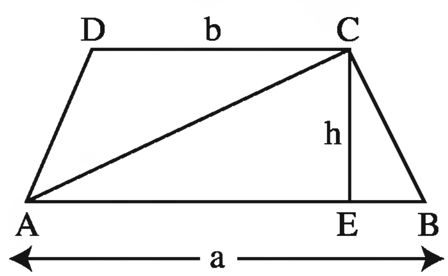
$\therefore \Delta$ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times BC \times AD$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2} \times a \times \frac{2\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}$ বর্গ একক

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ একক

ঙ) ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :

ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের সমান্তরাল দুইটি বাহু এবং তাদের মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব দেওয়া থাকলে ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় করা যায়।



মনে করি, ABCD একটি ট্রাপিজিয়াম যার সমান্তরাল বাহু দুইটি যথাক্রমে $AB = a$ একক এবং $DC = b$ একক। AC যোগ করি এবং C বিন্দু থেকে AB বাহুর ওপর CE লম্ব আঁকি। তাহলে, AB ও DC বাহু দুইটির মধ্যবর্তী লম্ব দূরত্ব CE।
মনে করি, $CE = h$ একক।

সুতরাং ABCD ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= (\Delta$ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল$) + (\Delta$ ক্ষেত্র ADC এর ক্ষেত্রফল$)$

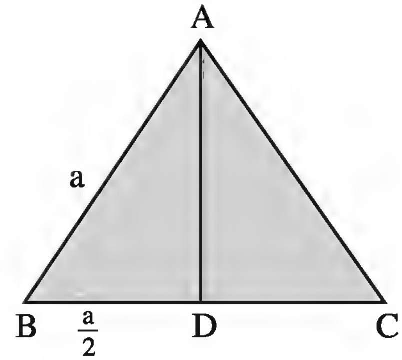
$= (\frac{1}{2} \times AB \times CE)$ বর্গ একক $+ (\frac{1}{2} \times DC \times CE)$ বর্গ একক [যেহেতু ADC এর উচ্চতাও CE]

$= \frac{1}{2} \times CE \times (AB + DC)$ বর্গ একক

$= \frac{1}{2}\, h\,(a+b)$ বর্গ একক।

(চ) কয়েকটি বিশেষ ক্ষেত্র :

(১) সমবাহু ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :



মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজ ABC এর প্রত্যেকটি বাহুর দৈর্ঘ্য $= a$ একক।
A বিন্দু থেকে BC বাহুর ওপর AD লম্ব অঙ্কন করি।

তাহলে, $BD = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2} a$.

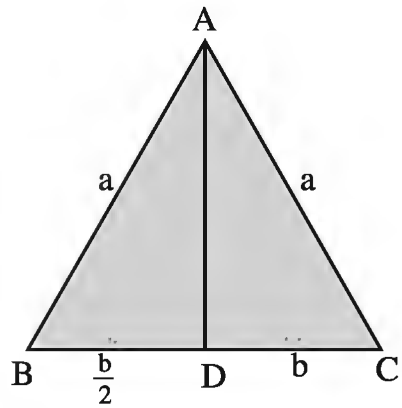
অতএব, $AD^2 = AB^2 - BD^2 = a^2 - \frac{a^2}{4} = \frac{3a^2}{4}$

$\therefore AD = \frac{\sqrt{3}a}{2}$

$\therefore$ সমবাহু Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}a}{2}$ বর্গ একক

$= \frac{\sqrt{3}}{4} a^2$ বর্গ একক

(২) সমদ্বিবাহু ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল :



মনে করি, ABC সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের $AB = AC = a$ এবং
$BC = b$. A বিন্দু থেকে BC এর ওপর AD লম্ব অঙ্কন করি।
তাহলে, $AD^2 = AB^2 - BD^2$

$= a^2 - \frac{b^2}{4} = \frac{4a^2 - b^2}{4}$

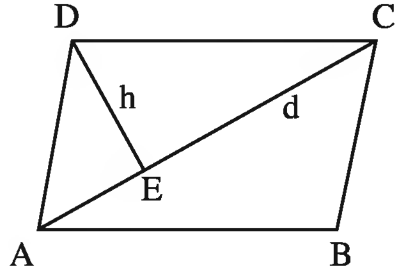
$\therefore AD = \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$

$\therefore$ সমদ্বিবাহু Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times b \times \frac{\sqrt{4a^2 - b^2}}{2}$ বর্গ একক

$= \frac{b}{4} \sqrt{4a^2 - b^2}$ বর্গ একক

(৩) সামান্তরিকক্ষেত্রের একটি কর্ণের দৈর্ঘ্য এবং বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে কর্ণের ওপর লম্ব দূরত্ব দেওয়া আছে :

মনে করি, ABCD একটি সামান্তরিক। এর কর্ণ $AC = d$ একক এবং শীর্ষবিন্দু D থেকে কর্ণ AC এর ওপর লম্ব $DE = h$ একক।



সামান্তরিকক্ষেত্র ABCD এর ক্ষেত্রফল

$= 2 \times \Delta$ ক্ষেত্র ADC এর ক্ষেত্রফল

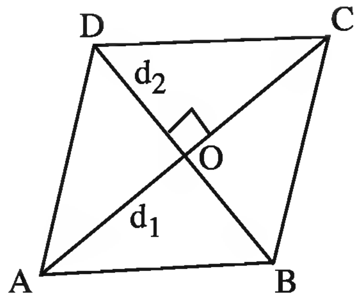
$= 2 \times \frac{1}{2} \times AC \times DE$ বর্গ একক

$= dh$ বর্গ একক।

(৪) রম্বসক্ষেত্রের কর্ণ দুইটি দেওয়া আছে :

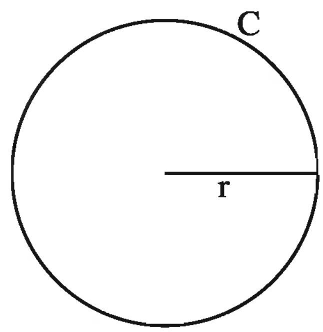
আমরা জানি, রম্বসের কর্ণ দুইটি পরস্পরকে সমকোণে সমদ্বিখণ্ডিত করে।

মনে করি, ABCD রম্বসের কর্ণ $AC = d_1$ একক এবং কর্ণ $BD = d_2$ একক।
মনে করি, AC ও BD কর্ণ দুইটি পরস্পরকে O বিন্দুতে ছেদ করে।
সুতরাং ABCD রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল
= (Δ ক্ষেত্র ADC এর ক্ষেত্রফল) + (Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল)
$= \frac{1}{2} \times AC \times OD$ বর্গ একক + $\frac{1}{2} \times AC \times OB$ বর্গ একক
$= \frac{1}{2} \times AC \times (OD + OB)$ বর্গ একক
$= \frac{1}{2} d_1 d_2$ বর্গ একক।



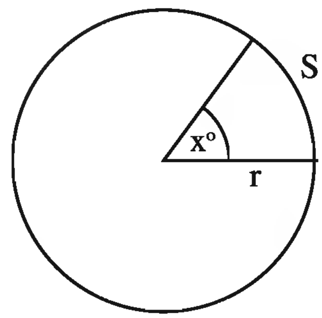
১৩.৩। বৃত্ত সংক্রান্ত পরিমাপ

(ক) বৃত্ত ও বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য



বৃত্তের দৈর্ঘ্যকে তার পরিধি বলা হয়। নবম অধ্যায়ে বৃত্তের আলোচনায় আমরা দেখেছি যে, (১) কোনো বৃত্তের ব্যাসার্ধ r হলে তার পরিধি $c = 2\pi r$, যেখানে $\pi = 3{\cdot}1415926535897932$ -------- একটি অমূলদ সংখ্যা।
সুতরাং ব্যাসার্ধ r জানা থাকলে π এর আসন্ন মান ব্যবহার করে বৃত্তের পরিধির আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়। π এর আসন্ন মান হিসেবে $3{\cdot}1416$ ব্যবহার করা হবে।

(২) r ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বৃত্তের যে চাপের ডিগ্রি পরিমাপ x তার দৈর্ঘ্য $s = \frac{\pi r x}{180}$.

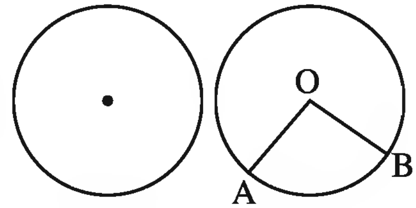


উল্লেখ্য যে, কোনো চাপের ডিগ্রি পরিমাপ হচ্ছে ঐ চাপ বৃত্তের কেন্দ্রে যে কোণ ধারণ করে তার ডিগ্রি পরিমাপ। সুতরাং বৃত্তের ব্যাসার্ধ r এবং বৃত্তের চাপ কেন্দ্রে যে কোণ ধারণ করে তার ডিগ্রি পরিমাপ জানা থাকলে π এর আসন্ন মান ব্যবহার করে চাপটির দৈর্ঘ্যের আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়।

(খ) বৃত্তক্ষেত্র ও বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল

সংজ্ঞা : কোনো বৃত্ত ও তার অভ্যন্তরের সংযোগে গঠিত সমতলের উপসেটটিকে একটি বৃত্তক্ষেত্র বলা হয় এবং বৃত্তটিকে এরূপ বৃত্তক্ষেত্রের সীমারেখা বলা হয়।

সংজ্ঞা : O কেন্দ্রিক বৃত্তে A ও B দুইটি বিন্দু হলে $\angle AOB$ এর অভ্যন্তর ও বৃত্তের অভ্যন্তরের ছেদের সঙ্গে OA রেখাংশ, OB রেখাংশ ও AB চাপের সংযোগে গঠিত সমতলের উপসেটটিকে একটি বৃত্তকলা বলা হয় এবং বৃত্তকলাটি AB চাপের ওপর দণ্ডায়মান বলা হয়।



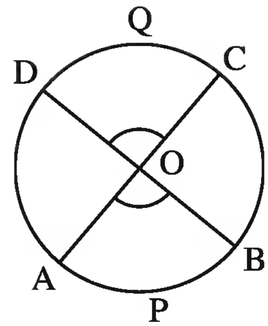
বৃত্তক্ষেত্র বৃত্তকলা

এ পর্যায়ে আমরা স্বীকার করে নিই যে,

সূত্র ১। যে বৃত্তের ব্যাসার্ধ r একক, তা দ্বারা সীমাবদ্ধ বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$ বর্গ একক।
সূত্র ২। একই বৃত্তের দুইটি বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল এবং তারা যে চাপ দুইটির ওপর দণ্ডায়মান তাদের ডিগ্রি পরিমাপ সমানুপতিক।

অর্থাৎ, পাশের চিত্রে,

$$\frac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা } COD \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{APB \text{ চাপের ডিগ্রি পরিমাপ}}{CQD \text{ চাপের ডিগ্রি পরিমাপ}}$$



লক্ষণীয় যে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ জানা থাকলে সূত্র ১ এ π এর আসন্ন মান ব্যবহার করে বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়।

বৃত্তাকার ক্ষেত্রফল

মনে করি, বৃত্তের কেন্দ্র O এবং তার ব্যাসার্ধ r একক। মনে করি, AOB বৃত্তকলাটি APB চাপের ওপর দণ্ডায়মান যার ডিগ্রি পরিমাপ θ। OA এর ওপর OC লম্ব অঙ্কন করি।

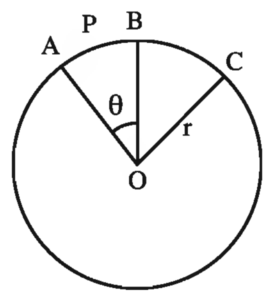
$$\frac{\text{বৃত্তকলা } AOB \text{ এর ক্ষেত্রফল}}{\text{বৃত্তকলা } AOC \text{ এর ক্ষেত্রফল}} = \frac{\angle AOB \text{ এর ডিগ্রি পরিমাপ,}}{\angle AOC \text{ এর ডিগ্রি পরিমাপ}}$$

বা, বৃত্তকলা AOB এর ক্ষেত্রফল $= \frac{\theta}{90} \times$ বৃত্তকলা AOC এর ক্ষেত্রফল [যেহেতু $\angle AOC = 90°$]

$$= \frac{\theta}{90} \times \frac{1}{4} \times \text{বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল}$$

$$= \frac{\theta}{90} \times \frac{1}{4} \times \pi r^2 \text{ বর্গ একক}$$

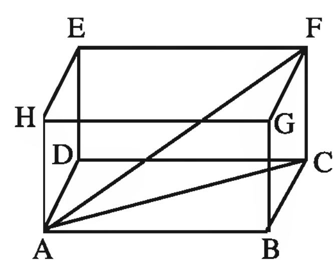
$$= \frac{\theta}{360°} \times \pi r^2 \text{ বর্গ একক}$$



এই সূত্রে π এর আসন্ন মান ব্যবহার করে বৃত্তকলার ক্ষেত্রফলের আসন্ন মান নির্ণয় করা যায়।

১৩.৪। আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনক সংক্রান্ত পরিমাপ

(১) আয়তাকার ঘনবস্তু



তিন জোড়া সমান্তরাল আয়তাকার সমতল বা পৃষ্ঠ দ্বারা আবদ্ধ ঘনবস্তুকে আয়তাকার ঘনবস্তু বলে।
মনে করি, ABCDEFGH একটি আয়তাকার ঘনবস্তু যেখানে এর দৈর্ঘ্য $AB = a$, প্রস্থ $AD = b$ এবং উচ্চতা $AH = c$ একক।
(i) আয়তাকার ঘনবস্তুটির কর্ণ AF

$$= \sqrt{AC^2 + CF^2}$$

$$= \sqrt{AB^2 + BC^2 + CF^2}$$

$$= \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \text{ [যেহেতু } BC = AD = b, CF = AH = c]$$

সহজেই দেখানো যায় যে, আয়তাকার ঘনবস্তুটির যেকোনো কর্ণের দৈর্ঘ্য একই হবে।

(ii) আয়তাকার ঘনবস্তুটির সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল

= 2(ABCD তলের ক্ষেত্রফল + ABGH তলের ক্ষেত্রফল + BCFG তলের ক্ষেত্রফল)

= $2(AB \times AD + AB \times AH + BC \times BG)$ বর্গ একক

= $2(ab + ac + bc)$ বর্গ একক [যেহেতু $BC = AD = b$ এবং $BG = AH = c$]

= $2(ab + bc + ca)$ বর্গ একক।

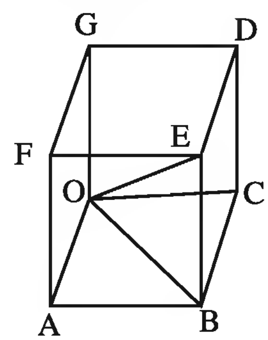
(iii) আয়তাকার ঘনবস্তুটির আয়তন = আয়তাকার ঘনবস্তু এর (দৈর্ঘ্য × প্রস্থ × উচ্চতা)

= $AB \times AD \times AH$ ঘন একক

= abc ঘন একক।

(২) ঘনক

আয়তাকার ঘনবস্তু এর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা সমান হলে, তাকে ঘনক বলে। মনে করি, OABCDEFG একটি ঘনক। এর দৈর্ঘ্য = প্রস্থ = উচ্চতা = a একক।



(i) ঘনকটির কর্ণ OE $= \sqrt{OB^2 + BE^2}$

$= \sqrt{OA^2 + AB^2 + BE^2}$

$= \sqrt{a^2 + a^2 + a^2}$ একক [যেহেতু $AB = OC = a$

$= \sqrt{3a^2}$ একক এবং $BE = OG = a$]

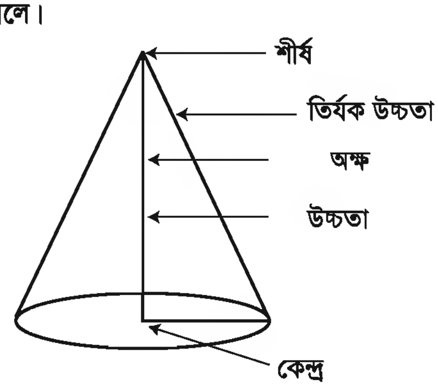
$= \sqrt{3}a$ একক

(ii) ঘনক এর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল = $2(a^2 + a^2 + a^2)$ বর্গ একক = $6a^2$ বর্গ একক।

(iii) ঘনকটির আয়তন = $a \times a \times a$ ঘন একক = a^3 ঘন একক।

১৩.৫। কোণক, বেলন ও গোলক সংক্রান্ত পরিমাপ

(১) কোণক : কোনো সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ সংলগ্ন যেকোনো একটি বাহুকে স্থির রেখে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ত্রিভুজটিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক কোণক বলে।

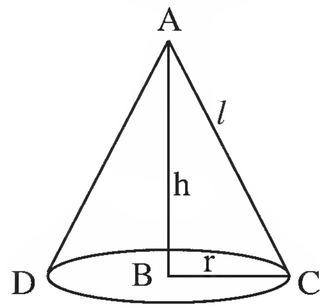


যে বাহুর চতুর্দিকে ত্রিভুজটিকে ঘোরানো হয়, তাকে কোণকের অক্ষ বলে। সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমি একটি বৃত্ত হবে এবং ব্যাসার্ধ হবে সমকোণ সংলগ্ন অক্ষ ব্যতীত অপর বাহুর দৈর্ঘ্যের সমান। অক্ষের সমকোণযুক্ত প্রান্তবিন্দুকে বৃত্তের কেন্দ্র এবং অপর প্রান্তবিন্দুকে কোণকের শীর্ষ বলে। অক্ষের দৈর্ঘ্যকে কোণকের উচ্চতা বলে। কোণকের শীর্ষ এবং বৃত্তাকার ভূমির পরিধির ওপর যেকোনো বিন্দুর সংযোজক রেখাংশের দৈর্ঘ্যকে কোণকের তির্যক উচ্চতা বা হেলান উন্নতি বলে।

[**দ্রষ্টব্য :** কোণক বলতে সাধারণত সমবৃত্তভূমিক কোণককেই বোঝানো হয়ে থাকে।]

কোণকের ক্ষেত্রফল :

মনে করি, ABCD একটি কোণক। এর ভূমির ব্যাসার্ধ $BC = r$ একক, উচ্চতা $AB = h$ এবং তির্যক উচ্চতা বা হেলান উন্নতি $AC = l$ একক। সমকোণী ত্রিভুজ ABC থেকে আমরা পাই,



$AC^2 = AB^2 + BC^2$

বা, $l^2 = h^2 + r^2$

$\therefore\ l = \sqrt{h^2 + r^2}$

(i) কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times$ (ভূমির পরিধি) $\times$ (হেলান উন্নতি)

$= \frac{1}{2} \times 2\pi r \times l$ বর্গ একক

$= \pi r l$ বর্গ একক

$= \pi r \sqrt{h^2 + r^2}$ বর্গ একক।

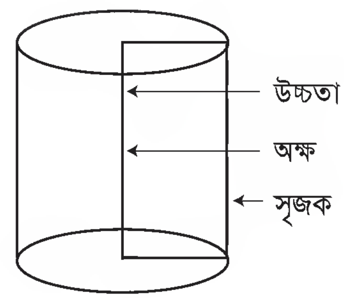
(ii) কোণক এর সমগ্র তলের ক্ষেত্রফল = বক্রতলের ক্ষেত্রফল + ভূমির ক্ষেত্রফল

$= \pi r l + \pi r^2$ বর্গ একক

$= \pi r (l + r)$ বর্গ একক।

(iii) কোণক এর আয়তন $= \frac{1}{3} \times$ (ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা)

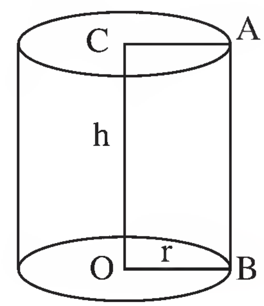
$= \frac{1}{3}\ \pi r^2 h$ ঘন একক।



(২) বেলন : কোনো আয়তক্ষেত্রের যেকোনো বাহুকে অক্ষ ধরে আয়তক্ষেত্রটিকে ঐ বাহুর চতুর্দিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়, তাকে সমবৃত্তভূমিক বেলন বলে। সমবৃত্তভূমিক বেলনের দুই প্রান্ত বৃত্ত হবে। বেলনের অক্ষের দৈর্ঘ্যকে এর উচ্চতা বলা হয়। আয়তক্ষেত্রের অক্ষের সমান্তরাল ঘূর্ণায়মান বাহুটিকে বেলনের সৃজক বা উৎপাদক রেখা বলে।

[**দ্রষ্টব্য :** বেলন বলতে সাধারণত সমবৃত্তভূমিক বেলনকেই বোঝান হল।]

বেলনের ক্ষেত্রফল :



মনে করি, ABOC একটি বেলন। এর ভূমির ব্যাসার্ধ $OB = r$ একক এবং উচ্চতা $OC = h$ একক

(i) বেলন এর বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = ভূমির পরিধি $\times$ উচ্চতা

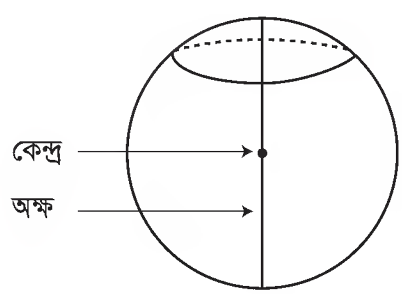
$= 2\pi r h$ বর্গ একক।

(ii) বেলন এর সমগ্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = বক্রপৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল + দুই প্রান্তের ক্ষেত্রফল $= (2\pi r h + 2\pi r^2)$ বর্গ একক

$= 2\pi r (h + r)$ বর্গ একক।

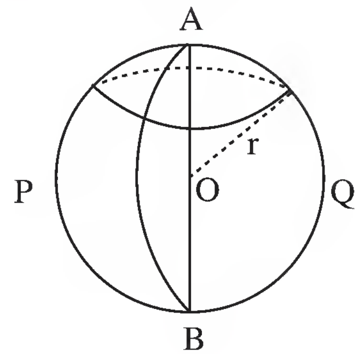
(iii) বেলন এর আয়তন = ভূমির ক্ষেত্রফল $\times$ উচ্চতা

$= \pi r^2 h$ ঘন একক।



(৩) গোলক : কোনো অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে অক্ষ ধরে অর্ধবৃত্তটিকে ঐ ব্যাসের চারদিকে ঘোরালে যে ঘনবস্তুর সৃষ্টি হয়, তাকে গোলক বলে। অর্ধবৃত্তের কেন্দ্রটি গোলকের কেন্দ্র। অর্ধবৃত্তটি এর ব্যাসের চারদিকে ঘুরে যে তল উৎপন্ন করে, তাকে গোলকের তল বলে। অর্ধবৃত্তের ব্যাসই গোলকের ব্যাস।

গোলকের ক্ষেত্রফল : মনে করি, APBQ একটি গোলক। O এর কেন্দ্র এবং ব্যাসার্ধ r একক।



(i) গোলকের পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= \pi \times (\text{ব্যাস})^2$ বর্গ একক

$= \pi \times (2r)^2$ বর্গ একক

$= 4\pi r^2$ বর্গ একক।

(iii) গোলক এর আয়তন $= \frac{4}{3}\pi r^3$ ঘন একক।

১৩.৬। পরিমিতি সংক্রান্ত বিবিধ সমস্যাদি

(ক) আয়তক্ষেত্র

উদাহরণ ১। একটি আয়তাকার ঘরের দৈর্ঘ্য বিস্তারের দ্বিগুণ। এর ক্ষেত্রফল 512 বর্গমিটার হলে, পরিসীমা কত?

সমাধান : মনে করি, ঘরের প্রস্থ = x মি.

$\therefore$ " দৈর্ঘ্য = 2x মি.

$\therefore$ " ক্ষেত্রফল = $2x^2$ বর্গ মি.

প্রশ্নানুসারে, $2x^2 = 512$

বা, $x^2 = 256$

$\therefore x = 16$

অতএব, ঘরের প্রস্থ = 16 মি.

এবং ঘরের দৈর্ঘ্য = 2×16 মি. = 32 মি.

$\therefore$ ঘরের পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)

= 2(32 + 16) মিটার

= 96 মিটার।

উত্তর : পরিসীমা = 96 মিটার

উদাহরণ ২। একটি আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 160 বর্গমিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য 6 মিটার কম হয়, তবে ক্ষেত্রটি বর্গাকার হয়। আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = x মি.

এবং " " প্রস্থ = y মিটার.

$\therefore$ আয়তাকার ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = xy বর্গ মি.

প্রশ্নানুসারে, $xy = 160$ .... (i)

আবার শর্তানুসারে, $x - 6 = y$

বা, $x = y + 6$ .... (ii)

(ii) নং সমীকরণের x এর মান (i) নং সমীকরণে বসিয়ে পাই,

$(y + 6)y = 160$

বা, $y^2 + 6y - 160 = 0$

বা, $y^2 + 16y - 10y - 160 = 0$

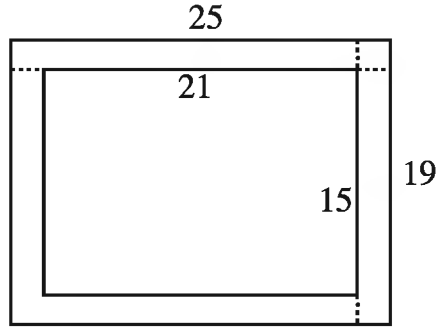
বা, $(y + 16)(y - 10) = 0$

$\therefore y + 16 = 0$ অথবা, $y - 10 = 0$

$\therefore y = -16, 10$

$\therefore$ $y = 10$, যেহেতু $y = -16$ গ্রহণযোগ্য নয়। [কারণ, দৈর্ঘ্য বা প্রস্থ ঋণাত্মক হতে পারে না]
$\therefore$ (ii) নং সমীকরণ থেকে পাই, $x = 10 + 6$
বা, $x = 16$
অতএব, আয়তাকার ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 16 মিটার এবং প্রস্থ = 10 মিটার।
উত্তর : দৈর্ঘ্য = 16 মিটার এবং প্রস্থ = 10 মিটার

উদাহরণ ৩। 21 মিটার দৈর্ঘ্য এবং 15 মিটার প্রস্থ একটি বাগানের বাইরে চারদিকে 2 মিটার চওড়া একটি পথ আছে। প্রতি বর্গ মিটার 25 টাকা হিসেবে পথটিতে ঘাস লাগাতে মোট কত খরচ হবে ?



সমাধান : বাগানের দৈর্ঘ্য = 21 মি.
” প্রস্থ = 15 মি.
$\therefore$ বাগানের ক্ষেত্রফল = 21×15 বর্গ মি.
= 315 বর্গ মি.
রাস্তাসহ বাগানের দৈর্ঘ্য = $(21 + 4)$ মি.
= 25 মি.
” ” প্রস্থ = $(15 + 4)$ মি.
= 19 মি.
রাস্তাসহ বাগানের ক্ষেত্রফল = 25×19 বর্গ মি. = 475 বর্গ মি.
অতত্রব, পথের ক্ষেত্রফল = $(475 - 315)$ বর্গ মি. = 160 বর্গ মি.
যেহেতু প্রতি বর্গ মিটার ঘাস লাগাতে খরচ হয় = 25 টাকা
$\therefore$ 160 ” ” ” ” ” = (160×25) টাকা। = 4000 টাকা।
$\therefore$ 160 বর্গ মিটার ঘাস লাগাতে খরচ হবে 4000 টাকা।
উত্তর : 4000 টাকা।

উদাহরণ ৪। একটি বর্গাকার বাগানের বাইরে চারদিকে 5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল 500 বর্গ মিটার হলে, বাগানের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বর্গাকার বাগানের এক বাহুর দৈর্ঘ্য x মিটার
$\therefore$ বর্গাকার বাগানের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গ মি.
রাস্তার ক্ষেত্রফল = 500 বর্গ মি.
অতএব, রাস্তাসহ বাগানের ক্ষেত্রফল = $(x^2 + 500)$ বর্গ মি. -------(i)
আবার, রাস্তাসহ বর্গাকার বাগানের এক পাড়ের দৈর্ঘ্য = $(x + 10)$ মি.
” ” ” ক্ষেত্রফল = $(x + 10)^2$ বর্গ মি.
= $(x^2 + 20x + 100)$ বর্গ মিটার. ----(ii)
(i) ও (ii) থেকে পাই,
$x^2 + 20x + 100 = x^2 + 500$
বা, $20x = 400$
বা, $x = 20$
অতএব, বাগানের ক্ষেত্রফল = x^2 বর্গ মি. = 20^2 বর্গ মি. = 400 বর্গ মিটার।
উত্তর : 400 বর্গ মিটার

উদাহরণ ৫। একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা একটি আয়তক্ষেত্রের পরিসীমার সমান। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য প্রস্থের তিন গুণ এবং ক্ষেত্রফল 768 বর্গ মিটার। প্রতিটি 40 সে.মি. বর্গাকার পাথর দিয়ে বর্গক্ষেত্রটি বাঁধাতে মোট কতটি পাথর লাগবে ?

সমাধান : মনে করি, আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = x মি.

অতএব, আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = $3x$ মি.

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল = $3x^2$ বর্গ মি.

প্রশ্নানুসারে, $3x^2 = 768$

বা, $x^2 = 256$

বা, $x = 16$

অর্থাৎ, আয়তক্ষেত্রের প্রস্থ = 16 মি.

$\therefore$ আয়তক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য = 3×16 মি. = 48 মি.

অতএব, আয়তক্ষেত্রের পরিসীমা = 2 (দৈর্ঘ্য + প্রস্থ)

= 2(48 + 16) মি. = 128 মি.।

অতএব, বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 128 মিটার।

$\therefore$ " এক বাহুর দৈর্ঘ্য = $(128 \div 4)$ মি. = 32 মি.

$\therefore$ " ক্ষেত্রফল = $(32)^2$ বর্গ মি. = 1024 বর্গ মি.

একটি পাথরের ক্ষেত্রফল = $(0{\cdot}4)^2$ বর্গ মি. = $0{\cdot}16$ বর্গ মি.

$\therefore$ মোট পাথর লাগবে = $(1024 \div 0{\cdot}16)$টি। = 6400 টি।

উত্তর : 6400 টি।

অনুশীলনী–১৩.১

১। একটি জমির দৈর্ঘ্য 80 মিটার এবং প্রস্থ 60 মিটার। ঐ জমির মাঝে একটি পুকুর খনন করা হল। যদি পুকুরের প্রত্যেক পাড়ের বিস্তার 4 মিটার হয়। তবে পুকুরের পাড়ের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২। একটি ঘরের মেঝে কার্পেট দিয়ে মোড়াতে 800 টাকা খরচ হয়। যদি ঘরটির দৈর্ঘ্য 1 মিটার কম হয়, তবে খরচ হয় 700 টাকা। ঘরের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩। একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 40 মিটার এবং প্রস্থ 30 মিটার। বাগানের ভিতরে সমান পাড়বিশিষ্ট একটি পুকুর আছে। পুকুরের ক্ষেত্রফল বাগানের ক্ষেত্রফলের $\frac{1}{2}$ অংশ হলে, পুকুরের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

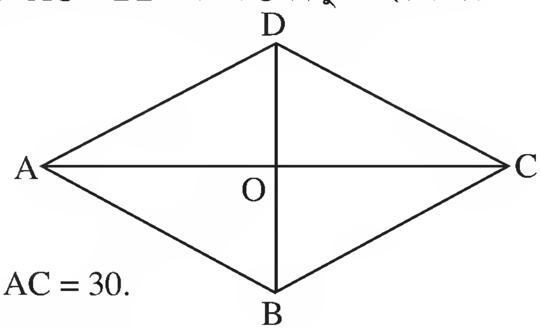
৪। বর্গাকার একটি মাঠের ভিতরে চার দিকে 4 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। যদি রাস্তার ক্ষেত্রফল 1 হেক্টর (10,000 বর্গ মিটার) হয়, তবে রাস্তা বাদে ভিতরের ক্ষেত্রফল কত ?

৫। একটি আয়তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 2000 বর্গ মিটার। যদি এর দৈর্ঘ্য 10 মিটার কম হত তাহলে এটি একটি বর্গক্ষেত্র হত। আয়তক্ষেত্রটির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

(খ) সামান্তরিক ও ট্রাপিজিয়াম

উদাহরণ ১। একটি রম্বসের কর্ণদ্বয় যথাক্রমে 40 সে. মি. এবং 60 সে. মি.। এর ক্ষেত্রফল পরিসীমা ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ABCD একটি রম্বস এবং এর কর্ণ দুইটি AC ও BD পরস্পর O বিন্দুতে ছেদ করে।



রম্বসক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AC \times BD$

$= \frac{1}{2} \times 60 \times 40$ বর্গ সে. মি.

$= 1200$ বর্গ সে. মি.

ABO সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,

$AB^2 = AO^2 + BO^2 = 30^2 + 20^2$ [যেহেতু $AO = \frac{1}{2}AC = 30.$

$BO = \frac{1}{2}BD = 20$]

$= 900 + 400 = 1300$

$\therefore$ রম্বসের বাহু $AB = \sqrt{1300}$ সে. মি. $= 36{\cdot}05$ সে. মি.

$\therefore$ রম্বসের পরিসীমা $= 4 \times AB = 4 \times 36{\cdot}05$ সে. মি. $= 144{\cdot}2$ সে. মি. (প্রায়)

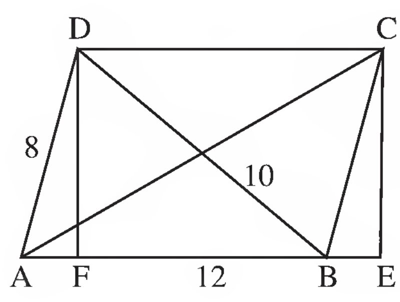
এবং রম্বসের উচ্চতা $= (1200 \div 36{\cdot}05)$ সে. মি. $= 33{\cdot}28$ সে. মি. (প্রায়)।

উত্তর : 1200 বর্গ সে. মি., 144·2 সে. মি. (প্রায়) এবং 33·28 সে. মি (প্রায়)

উদাহরণ ২। একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং 8 মিটার। এর ক্ষুদ্রতম কর্ণটি 10 মিটার হলে, অপর কর্ণটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ABCD সামান্তরিকটিতে $AB = a = 12$ মিটার এবং $AD = c = 8$ মিটার এবং $BD = b = 10$ মিটার। C ও D থেকে AB এর বর্ধিতাংশ ও AB এর উপর CE ও DF লম্ব টানি। AC ও BD যোগ করি।

ΔABD এ $AB = 12$ মি., $AD = 8$ মি. এবং $BD = 10$ মি.



$\therefore \Delta ABD$ এর পরিসীমা

$2s = (12 + 10 + 8)$ মি.। $= 30$ মি.

$s = 15$ মি.

$\therefore \Delta ABD$ ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল

$= \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ বর্গ মিটার

$= \sqrt{15(15-12)(15-10)(15-8)}$ বর্গ মিটার

$= \sqrt{15 \times 3 \times 5 \times 7}$ বর্গ মিটার

$= \sqrt{1575}$ বর্গ মিটার

$= 39{\cdot}68$ বর্গ মিটার (প্রায়)

আবার, ΔABD এর ক্ষেত্রফল $= \frac{1}{2} \times AB \times DF$

$\therefore 39{\cdot}68 = \frac{1}{2} \times 12 \times DF$

$\therefore DF = 39{\cdot}68 \div 6 = 6{\cdot}61$

অতএব, $CE = 6{\cdot}61$

আবার, $BC = AD = 8$
এখন, ΔBCE সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,
$CE^2 + BE^2 = BC^2$
বা, $BE^2 = BC^2 - CE^2$
$= 8^2 - (6{\cdot}61)^2 = 64 - 43{\cdot}69 = 20{\cdot}31$
$\therefore \quad BE = 4{\cdot}5$
অতএব, $AE = AB + BE = 12 + 4{\cdot}5 = 16{\cdot}5$
সুতরাং, ΔACE সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,
$AC^2 = AE^2 + CE^2$
$= (16{\cdot}5)^2 + (6{\cdot}61)^2 = 272{\cdot}25 + 43{\cdot}69 = 315{\cdot}94$
$\therefore$ $AC = \sqrt{315{\cdot}94}$ মি. $= 17{\cdot}77$ মিটার (প্রায়)।
$\therefore$ অপর কর্ণের দৈর্ঘ্য $= 17{\cdot}77$ মিটার (প্রায়)

উত্তর : $17{\cdot}77$ মিটার (প্রায়)।

উদাহরণ ৩। একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির একটি অন্যটি অপেক্ষা 1 মিটার বড় এবং এদের মধ্যে লম্ব দূরত্ব 2 মিটার। ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 27 বর্গ মি. হলে, বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটি a ও b এবং তাদের মধ্যে লম্ব দূরত্ব h;
মনে করি, $a = x$ মি.
$\therefore \quad b = (x + 1)$ মি.
ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল, $A = \frac{1}{2}(a + b)h$
বা, $27 = \frac{1}{2}(x + x + 1) \times 2$
বা, $2x = 26 \quad \therefore x = 13$
অতএব, ট্রাপিজিয়ামের একটি বাহু $a = x = 13$ মি.
এবং অপর বাহু $b = (x + 1)$ মি. $= (13 + 1)$ মি. $= 14$ মিটার।
উত্তর : 13 মিটার এবং 14 মিটার।

উদাহরণ ৪। একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্যের অন্তর 8 সে. মি. এবং তাদের লম্ব দূরত্ব 24 সে. মি.। যদি ট্রাপিজিয়াম ক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল লম্ব দূরত্বের 13 গুণ হয়, তবে সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটি a ও b এবং তাদের মধ্যে লম্ব দূরত্ব h;
$\therefore$ ক্ষেত্রফল $= 13 \times 24$ বর্গ সে. মি. $= 312$ বর্গ সে. মি.
অতএব, $312 = \frac{1}{2}(a + b) \times h$ বা, $312 = \frac{1}{2}(a + b) \times 24$
$\therefore a + b = 26$ ------- (i)
প্রশ্নানুসারে, $a - b = 8$ ----------- (ii)
এখন, (i) + (ii) থেকে পাই, $2a = 34 \quad \therefore a = 17$
(i) – (ii) থেকে পাই, $2b = 18 \quad \therefore b = 9$
$\therefore$ বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য 17 সে. মি. ও 9 সে. মি.।
উত্তর : 17 সে. মি. ও 9 সে. মি.।

অনুশীলনী – ১৩.২

১। একটি রম্বসের পরিসীমা 180 সে. মি. এবং ক্ষুদ্রতর কর্ণটি 54 সে. মি.। এর অপর কর্ণ এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২। একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 120 বর্গ সে. মি. এবং একটি কর্ণ 24 সে. মি। বিপরীত কৌণিক বিন্দু থেকে উক্ত কর্ণের ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩। একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 91 সে. মি. ও 51 সে. মি. এবং অপর বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য 37 সে. মি. ও 13 সে. মি.। এর ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

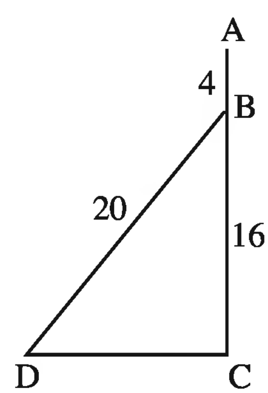
৪। একটি সামান্তরিকক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল একটি বর্গক্ষেত্রের ক্ষেত্রফলের সমান। সামান্তরিকের ভূমি 125 মি. এবং উচ্চতা 5 মি. হলে, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৫। একটি ট্রাপিজিয়ামের সমান্তরাল বাহু দুইটির একটি অন্যটি অপেক্ষা 4 মিটার বড় এবং তাদের মধ্যে লম্ব দূরত্ব 8 মিটার। ট্রাপিজিয়ামক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল 112 বর্গ মি. হলে, সমান্তরাল বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৬। একটি সামান্তরিকের বাহুর দৈর্ঘ্য 30 সে. মি. এবং 26 সে. মি.। এর ক্ষুদ্রতর কর্ণটি 28 সে. মি. হলে, অপর কর্ণটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(গ) ত্রিভুজ

উদাহরণ ১। 20 মিটার লম্বা একটি মই দেওয়ালের সাথে খাড়াভাবে আছে। মইটির গোড়া দেওয়াল থেকে কত দূরে সরালে ওপরের প্রান্ত 4 মিটার নিচে নামবে ?



সমাধান : মনে করি, AC মইয়ের গোড়া C থেকে D বিন্দুতে সরালে ওপরের প্রান্ত A থেকে B বিন্দুতে নামবে।
মইয়ের দৈর্ঘ্য = AC = BD = 20 মি. এবং AB = 4 মি.
$\therefore$ BC = 16 মিটার
এখন, $BC^2 + CD^2 = BD^2$
বা, $CD^2 = BD^2 - BC^2$
$= (20)^2 - (16)^2 = 400 - 256 = 144$
$\therefore CD = 12$
$\therefore$ দেওয়াল থেকে মইটির গোড়ার দূরত্ব = 12 মিটার।

উত্তর : 12 মিটার।

উদাহরণ ২। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 16 মিটার। এর সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য ভূমির $\frac{5}{6}$ অংশ হলে, ত্রিভুজক্ষেত্রটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ABC একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এবং এর ভূমি = x মিটার

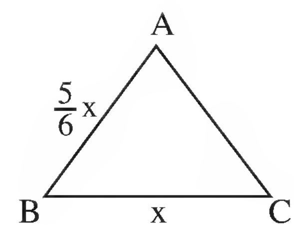
$\therefore AB = AC = \frac{5x}{6}$

প্রশ্নানুসারে, $x + \frac{5x}{6} + \frac{5x}{6} = 16$

বা, $16x = 96$ বা, $x = 6$

অতএব, BC = 6 মিটার এবং AB = AC

$\therefore\ AC = \frac{5 \times 6}{6}$ মি. $= 5$ মিটার



ধরি, $a = 6$ মি., $b = 5$ মি., $c = 5$ মি.

Δ ক্ষেত্র ABC এর পরিসীমা $2s = (6 + 5 + 5)$ মিটার $= 16$ মিটার

$\therefore\ s = 8$ মিটার

Δ ক্ষেত্র ABC এর ক্ষেত্রফল $= \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$ বর্গ মিটার

$= \sqrt{8(8-6)\,(8-5)\,(8-5)}$ বর্গ মিটার

$= \sqrt{8 \times 2 \times 3 \times 3}$

$= \sqrt{144}$ বর্গ মিটার

$= 12$ বর্গ মিটার।

উত্তর : 12 বর্গ মিটার।

উদাহরণ ৩। একটি সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর প্রত্যেকটির দৈর্ঘ্য 2 মিটার বাড়ালে এর ক্ষেত্রফল $3\sqrt{3}$ বর্গ মিটার বেড়ে যায়। সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, সমবাহু ত্রিভুজটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $= a$ মিটার

অতএব, সমবাহু ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}a^2}{4}$ বর্গ মিটার

প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য 2 মিটার বাড়ালে

ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \frac{\sqrt{3}\,(a+2)^2}{4}$ বর্গ মি. $= \frac{\sqrt{3}\,(a^2 + 4a + 4)}{4}$ বর্গ মি.

$\therefore$ প্রশ্নানুসারে, $\frac{\sqrt{3}\,(a^2 + 4a + 4)}{4} = \frac{\sqrt{3}a^2}{4} + 3\sqrt{3}$

বা, $\sqrt{3}\,(a^2 + 4a + 4) = \sqrt{3}a^2 + 12\sqrt{3}$

বা, $a^2 + 4a + 4 = a^2 + 12$

বা, $4a = 8$

বা, $a = 2$.

$\therefore$ সমবাহু ত্রিভুজটির প্রত্যেক বাহুর দৈর্ঘ্য $= 2$ মিটার।

উত্তর : 2 মিটার।

উদাহরণ ৪। একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা $120°$ কোণে চলে গেছে। দুইজন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 10 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 8 কিলোমিটার বেগে বিপরীত দিকে রওনা হল। 5 ঘণ্টা পরে তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব কত হবে ?

সমাধান : মনে করি, A থেকে দুইজন লোক যথাক্রমে ঘণ্টায় 10 কি. মি. ও ঘণ্টায় 8 কি. মি. বেগে রওনা হয়ে 5 ঘণ্টা পর B ও C বিন্দুতে এসে পৌঁছাল। তাহলে 5 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব হবে BC.

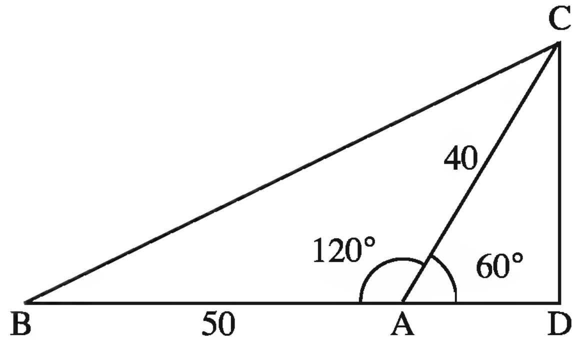
C থেকে BA বাহুর বর্ধিতাংশের ওপর CD লম্ব টানি।

তাহলে, $AB = 10 \times 5$ কি. মি. $= 50$ কি. মি.

$AC = 8 \times 5$ কি. মি. $= 40$ কি. মি.

$\angle BAC = 120°$

অতএব, $\angle CAD = 60°$



এখন, CAD সমকোণী ত্রিভুজ থেকে পাই,

$\frac{CD}{AC} = \sin 60°$ এবং $\frac{AD}{AC} = \cos 60°$

$\therefore CD = AC.\sin 60° = 40\frac{\sqrt{3}}{2} = 20\sqrt{3}$

এবং $AD = AC \cos 60° = 40 \times \frac{1}{2} = 20$

অতএব, CBD সমকোণী ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,

$BC^2 = BD^2 + CD^2 = (BA + AD)^2 + CD^2$

$= (50 + 20)^2 + (20\sqrt{3})^2 = 4900 + 1200 = 6100$

$\therefore BC = \sqrt{6100} = 78{\cdot}1$

$\therefore$ দূরত্ব 78·1 কি. মি.।

উত্তর : 78·1 কি. মি.।

অনুশীলনী–১৩.৩

১। একটি সমকোণী ত্রিভুজের অতিভুজ 25 মিটার। এর একটি বাহু অপরটির $\frac{3}{4}$ অংশ হলে, বাহু দুইটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

২। একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দৈর্ঘ্য 60 সে. মি.। এর ক্ষেত্রফল 1200 বর্গ সে. মি. হলে, সমান সমান বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩। একটি সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরস্থ একটি বিন্দু থেকে বাহু তিনটির ওপর অঙ্কিত লম্বের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 6,7, 8 সে. মি. হলে, ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৪। একটি ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 25, 20, 15 একক। বৃহত্তম বাহুর বিপরীত শীর্ষবিন্দু থেকে অঙ্কিত লম্ব ত্রিভুজটিকে যে দুইটি ত্রিভুজে বিভক্ত করে তাদের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫। একটি নির্দিষ্ট স্থান থেকে দুইটি রাস্তা পরস্পর 135° কোণ করে দুইদিকে চলে গেছে। দুইজন লোক ঐ নির্দিষ্ট স্থান থেকে যথাক্রমে ঘণ্টায় 7 কিলোমিটার ও ঘণ্টায় 5 কিলোমিটার বেগে বিপরীত মুখে রওনা হল। 4 ঘণ্টা পর তাদের মধ্যে সরাসরি দূরত্ব কত হবে ?

৬। একটি সমকোণী ত্রিভুজের লম্ব ভূমির $\frac{11}{12}$ অংশ থেকে 6 সে. মি. কম এবং অতিভুজ ভূমির $\frac{4}{3}$ অংশ থেকে 3 সে. মি. কম। ত্রিভুজটির ভূমির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৭। একটি সমবাহু ত্রিভুজের প্রতিটি বাহুর দৈর্ঘ্য 1 মিটার করে বাড়ানো হলে এর ক্ষেত্রফল $\sqrt{3}$ বর্গ মিটার বেড়ে যায়। ত্রিভুজটির বাহুর দৈর্ঘ্য এবং ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৮। একটি সমকোণী ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 28, 45, 53 সে. মি.। বৃহত্তম (ক্ষেত্র পরিমাপ অর্থে) বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর যেখানে বর্গক্ষেত্রটি ত্রিভুজক্ষেত্রটির একটি উপসেট এবং যার একটি কৌণিক বিন্দু ত্রিভুজটির অতিভুজের ওপর অবস্থিত।

[**ইঙ্গিত :** সমকোণের সমদ্বিখণ্ডক রেখা অতিভুজকে যে বিন্দুতে ছেদ করে তা বর্গের একটি কৌণিক বিন্দু।]

(ঘ) বৃত্ত ও বৃত্তচাপ

অন্যভাবে উল্লিখিত না হলে, π এর আসন্ন মান 3·1416 ধরা হবে।

উদাহরণ ১। 28 সে. মি. ব্যাসবিশিষ্ট একটি বৃত্তের পরিধি যদি একটি বর্গক্ষেত্রের পরিসীমার সমান হয়, তবে উক্ত বর্গক্ষেত্রের কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : দেওয়া আছে, বৃত্তের ব্যাস = 28 সে. মি.
অতএব, বৃত্তের ব্যাসার্ধ r = 14 সে. মি.
$\therefore$ বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$ সে. মি. = 2 × 3·1416 × 14 সে. মি. = 87·9648 সে. মি.
প্রশ্নানুসারে, বর্গক্ষেত্রের পরিসীমা = 87·9648 সে. মি.
$\therefore$ বর্গক্ষেত্রের এক বাহু, a = (87·9648 ÷ 4) সে. মি. = 21·9912 সে. মি.
অতএব, বর্গক্ষেত্রের কর্ণ = a = 21·9912 × সে. মি. = 31·1003 সে. মি. (প্রায়)।
উত্তর : 31·1003 সে. মি. (প্রায়)।

উদাহরণ ২। একটি বৃত্তের পরিধি 220 মিটার। ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r মিটার এবং
ABCD বর্গক্ষেত্রটি ঐ বৃত্তে অন্তর্লিখিত।
আমরা জানি, বৃত্তের পরিধি = $2\pi r$ মিটার।
প্রশ্নানুসারে, $2\pi r = 220$
বা, 2 × 3·1416 × r = 220
বা, 6·2832 r = 220
বা, r = 35·0140
$\therefore$ বৃত্তের ব্যাসার্ধ = 35·0140 মিটার।
বৃত্তের ব্যাস AC = 2 × 35·0140 মি. = 70·028 মিটার।
এখন, ABC সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ থেকে আমরা পাই,
$AB^2 + BC^2 = AC^2$
বা, $2AB^2 = AC^2$, [BC = AB]
বা, .AB = AC

$\therefore$ AB = × 70·028 = 35·014 = 49·5173

$\therefore$ নির্ণেয় বাহু = 49·5173 মিটার।

উত্তর : 49·5173 মিটার।

উদাহরণ ৩। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 10 সে. মি. এবং বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য 11 সে. মি.। বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে কত ডিগ্রি কোণ উৎপন্ন করে ?

সমাধান : মনে করি, বৃত্তচাপটি কেন্দ্রে $\theta°$ কোণ উৎপন্ন করে।
এখানে বৃত্তচাপের দৈর্ঘ্য s = 11 সে. মি. এবং ব্যাসার্ধ r = 10 সে. মি.।

আমরা জানি, s =

বা, 11 =   বা, 11 =

বা, $\theta = \dfrac{11 \times 360}{2 \times 10 \times 3{\cdot}1416}$ $\therefore \theta = 63{\cdot}0252$

$\therefore$ কেন্দ্রে উৎপন্ন কোণের মান = $63{\cdot}0252°$

উত্তর : $63{\cdot}0252°$

উদাহরণ ৪। একটি গাড়ির সামনের চাকার ব্যাস 28 সে. মি. এবং পিছনের চাকার ব্যাস 35 সে. মি.। 88 মিটার পথ যেতে সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা কত পূর্ণসংখ্যক বার বেশি ঘুরবে?

সমাধান : গাড়ির সামনের চাকার ব্যাসার্ধ = $\dfrac{28}{2}$ সে. মি. = 14 সে. মি.।

" পিছনের " " = $\dfrac{35}{2}$ সে. মি.

অতএব, " সামনের চাকার পরিধি = $2 \times 3{\cdot}1416 \times 14$ সে. মি. = $87{\cdot}9648$ সে. মি.।

এবং " পিছনের " " = $2 \times 3{\cdot}1416 \times \dfrac{35}{2}$ সে. মি. = $109{\cdot}956$ সে. মি.

এখন, 88 মি. = 88×100 সে. মি.

সুতরাং 88 মিটার পথ যেতে গাড়ির সামনের চাকা ঘুরবে $\dfrac{88 \times 100}{87{\cdot}9648}$ বা, $100{\cdot}04$ বার

বা, 100 বার (প্রায়)

এবং গাড়ির পিছনের চাকা ঘুরবে $\dfrac{88 \times 100}{109{\cdot}956}$ বা, $80{\cdot}032$ বার বা, 80 বার (প্রায়)।

অতএব, সামনের চাকা পিছনের চাকা অপেক্ষা $(100 - 80)$ বা, 20 বার বেশি ঘুরবে।

উত্তর : 20 বার।

অনুশীলনী–১৩.৪

[π এর মান $3{\cdot}1416$ ধরতে হবে এবং উত্তর আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত উল্লেখ করতে হবে।]

১। একটি বৃত্তের ব্যাস এবং পরিধির পার্থক্য 60 সে. মি. হলে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

২। একটি বৃত্তচাপ কেন্দ্রে $30°$ কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তের ব্যাস 126 সে. মি. হলে, চাপের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

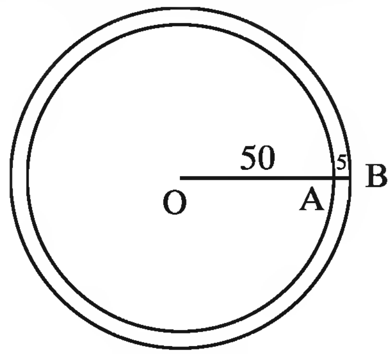
৩। একটি চাকার ব্যাস $4{\cdot}2$ মিটার। চাকাটি 330 মিটার পথ অতিক্রম করতে কত বার ঘুরবে?

৪। প্রতি মিনিটে 66 মিটার বেগে $1\frac{1}{2}$ মিনিটে একটি ঘোড়া কোনো বৃত্তাকার মাঠ ঘুরে এল। ঐ মাঠের ব্যাস কত?

৫। 211 মিটার 20 সে. মি. যেতে দুইটি চাকা যথাক্রমে 32 এবং 48 বার ঘুরল। চাকা দুইটির ব্যাসার্ধের অন্তর কত?

(ঙ) বৃত্তক্ষেত্র ও তার অংশবিশেষের ক্ষেত্রফল

উদাহরণ ১। একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাস 100 মিটার। মাঠের সীমানা ঘেঁষে 5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান : এখানে মাঠের ব্যাসার্ধ $OA = (100 \div 2)$ মি.

$= 50$ মি.

$\therefore$ রাস্তার প্রস্থ $AB = 5$ মি.

এখানে রাস্তাটি একটি বৃত্তাকার রিং যার

অন্তর্বৃত্তের ব্যাসার্ধ $r = 50$ মি.

এবং বহির্বৃত্তের ব্যাসার্ধ $R = (50 + 5)$ মি. $= 55$ মি.

অতএব, রাস্তার ক্ষেত্রফল = বহিঃবৃত্তের ক্ষেত্রফল – অন্তঃবৃত্তের ক্ষেত্রফল $= \pi R^2 - \pi r^2$ বর্গ একক

$= \pi(R^2 - r^2)$ বর্গ একক

$\therefore$ রাস্তাটির ক্ষেত্রফল $= 3{\cdot}1416 \times (55^2 - 50^2)$ ব. মি.

$= 3{\cdot}1416\ (55 + 50)\ (55 - 50)$ ব. মি.

$= 3{\cdot}1416 \times 105 \times 5$ বর্গ মি.

$= 1649{\cdot}34$ বর্গ মিটার।

উত্তর : $1649{\cdot}34$ বর্গ মিটার।

উদাহরণ ২। একটি বৃত্তের পরিধি একটি সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমার সমান। তাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বৃত্তের ব্যাসার্ধ $= r$

অতএব, বৃত্তক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2$

এবং বৃত্তের পরিধি $= 2\pi r$

প্রশ্নানুসারে, সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা $= 2\pi r$

$\therefore$ এক বাহুর দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2\pi r}{3}$

এখন, ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \dfrac{\sqrt{3}}{4} a^2$ বর্গ একক, যেখানে সমবাহু ত্রিভুজের বাহুর দৈর্ঘ্য a একক.

$= \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left(\dfrac{2\pi r}{3}\right)^2$ বর্গ একক $= \dfrac{\sqrt{3}}{4}.\ \dfrac{4\pi^2 r^2}{9}$ বর্গ একক

$= \dfrac{\pi^2 r^2}{3\sqrt{3}}$ বর্গ একক

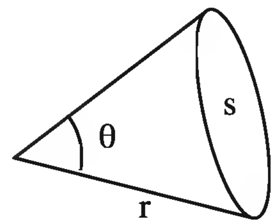
অতএব, বৃত্তাকারক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ঃ সমবাহু ত্রিভুজক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল $= \pi r^2 : \dfrac{\pi^2 r^2}{3\sqrt{3}}$

$= 3\sqrt{3} : \pi$

উত্তর : $3\sqrt{3} : \pi$

উদাহরণ ৩। একটি বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল 77 বর্গমিটার এবং বৃত্তের ব্যাসার্ধ 21 মিটার। বৃত্তকলাটি কেন্দ্রের সাথে যে কোণ উৎপন্ন করে, তা নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল = $\frac{\theta}{360}\pi r^2$ বর্গ একক
যেখানে বৃত্তের ব্যাসার্ধ = r এবং চাপের ডিগ্রি পরিমাপ = θ



$\therefore 77 = \frac{\theta}{360} \times 3{\cdot}1416 \times (21)^2$

$\therefore \theta = \frac{360 \times 77}{3{\cdot}1416 \times 21 \times 21} = 20{\cdot}008$

$\therefore$ নির্ণেয় কোণ = $20{\cdot}008°$

উত্তর : $20{\cdot}008°$

অনুশীলনী–১৩.৫

[π এর মান 3·1416 ধরতে হবে এবং উত্তর আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত উল্লেখ করতে হবে।]

১। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে. মি. এবং বৃত্তকলা কেন্দ্রে 75° কোণ উৎপন্ন করে। বৃত্তকলার ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

২। একটি বৃত্তের ব্যাসার্ধ 14 সে. মি.। একটি বর্গের ক্ষেত্রফল উক্ত বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সমান। বর্গটির বাহুর দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

৩। একটি বৃত্তাকার মাঠকে ঘিরে একটি রাস্তা আছে। রাস্তাটির ভিতরের পরিধি অপেক্ষা বাইরের পরিধি 44 মিটার বড়। রাস্তাটির চওড়া নির্ণয় কর।

৪। একটি বৃত্তাকার পার্কের ব্যাস 26 মিটার। পার্কটিকে বেষ্টন করে বাইরে 2 মিটার প্রশস্ত একটি পথ আছে। পথটির ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৫। একটি তৃণক্ষেত্রের 3850 বর্গ মিটার পরিমাণ স্থানের ঘাস খেতে পারে এরূপভাবে একটি গরু দড়ি দিয়ে বাঁধা আছে। ঐ দড়িটির দৈর্ঘ্য কত ?

(চ) আয়তাকার ঘনবস্তু ও ঘনক

উদাহরণ ১। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 2368 বর্গ সে. মি.। যদি ঘনবস্তুটির দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 6 ঃ 5 ঃ 4 হয়, তবে এর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, ঘনবস্তুটির দৈর্ঘ্য (a) = 6x সে. মি.
" প্রস্থ (b) = 5x সে. মি.
" উচ্চতা (c) = 4x সে. মি.

আমরা জানি, আয়তাকার ঘনবস্তুর সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল = 2(ab + bc + ca)

$\therefore 2368 = 2(6x \times 5x + 5x \times 4x + 4x \times 6x)$

বা, $2368 = 2 \times 74x^2$

বা, $x^2 = 16$

$\therefore x = 4$

আয়তাকার ঘনবস্তর দৈর্ঘ্য ( ) 6 সে মি 6 4 সে মি 24 সে মি

” ” প্রস্থ (b) = 5x সে. মি. = 5 × 4 সে. মি. = 20 সে. মি.
” ” উচ্চতা (c) = 4x সে. মি. = 4 × 4 সে. মি. = 16 সে. মি.।

উত্তর : দৈর্ঘ্য 24 সে. মি.; প্রস্থ 20 সে. মি. এবং উচ্চতা 16 সে. মি।

উদাহরণ ২। একটি আয়তাকার ঘনবস্তু 48 বর্গ মিটার ক্ষেত্রফলবিশিষ্ট ভূমির ওপর দণ্ডায়মান। এর উচ্চতা 3 মিটার এবং কর্ণ 13 মিটার। আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য = a মি.
” ” প্রস্থ = b মি.
$\therefore$ ভূমির ক্ষেত্রফল = ab বর্গ মি. = 48 বর্গ মি.।
আমরা জানি, আয়তাকার ঘনবস্তু এর কর্ণ (d) = $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$
এখানে, উচ্চতা (c) = 3 মিটার
$\therefore\ 13 = \sqrt{a^2+b^2+3^2}$
বা, $169 = a^2+b^2+9$
বা, $a^2+b^2 = 169-9 = 160$ .... (i)
$\therefore\ (a+b)^2 = a^2+b^2+2ab$
$= 160 + 2\times 48$ [যেহেতু $a^2+b^2 = 160$ ও $ab = 48$]
$= 256$
$\therefore\ a+b = \sqrt{256} = 16$ .... (ii)
আবার, $(a-b)^2 = a^2+b^2-2ab$
$= 160 - 96 = 64$
$\therefore\ a-b = 8$ .... (iii)
এখন, (ii) + (iii) থেকে পাই $2a = 24$ বা, $a = 12$
এবং (ii) − (iii) থেকে পাই, $2b = 8$, বা, $b = 4$
অতএব, দৈর্ঘ্য = 12 মিটার এবং প্রস্থ = 4 মিটার।

উত্তর : দৈর্ঘ্য 12 মিটার এবং প্রস্থ 4 মিটার।

উদাহরণ ৩। তিনটি ঘনকের ধার যথাক্রমে 3 সে. মি., 4 সে. মি. ও 5 সে. মি.। ঘনক তিনটিকে গলিয়ে একটি নতুন ঘনক বানান হল। নতুন ঘনকের ধার ও কর্ণ নির্ণয় কর।

সমাধান : আমরা জানি, ঘনকের ধার a সে. মি. হলে,

ঘনকের আয়তন = a^3 ঘন সে. মি.

এবং ঘনকের কর্ণ = $a\sqrt{3}$ সে. মি.
এখানে, নতুন ঘনকের আয়তন = $(3^3+4^3+5^3)$ ঘন সে. মি.
= $(27+64+125)$ ঘন সে. মি.
= 216 ঘন সে. মি.

$\therefore$ নতুন ঘনকের ধার = $\sqrt[3]{216}$ সে. মি. = 6 সে. মি.

এবং নতুন ঘনকের কর্ণ = $a\sqrt{3}$ সে. মি. = $6\sqrt{3}$ সে. মি. = 10·3923 সে. মি.।
উত্তর : ধার 6 সে. মি. এবং কর্ণ 10·3923 সে. মি.।

উদাহরণ ৪। একটি আয়তাকার বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 8 সে. মি. 6 সে. মি. ও 4 সে. মি., ভিতরের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 88 বর্গ সে. মি.। বাক্সটির কাঠের পুরুত্ব নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, কাঠের পুরুত্ব $= x$ সে. মি.
অতএব, বাক্সের ভিতরের দৈর্ঘ্য $a = (8 - 2x)$ সে. মি.
বাক্সের ভিতরের প্রস্থ $b = (6 - 2x)$ সে. মি.
এবং বাক্সের ভিতরের উচ্চতা $c = (4 - 2x)$ সে. মি.
সুতরাং, বাক্সটির ভিতরের সমগ্র পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল
$= 2(ab + bc + ca)$ বর্গ একক
$= 2\{(8 - 2x)(6 - 2x) + (6 - 2x)(4 - 2x) + (4 - 2x)(8 - 2x)\}$ বর্গ সে. মি.
$= 2(48 - 28x + 4x^2 + 24 - 20x + 4x^2 + 32 - 24x + 4x^2)$ বর্গ সে. মি.
$= 2(12x^2 - 72x + 104)$ বর্গ সে. মি.
প্রশ্নানুসারে, $2(12x^2 - 72x + 104) = 88$
বা, $12x^2 - 72x + 104 = 44$
বা, $12x^2 - 72x + 60 = 0$
বা, $x^2 - 6x + 5 = 0$
বা, $(x - 5)(x - 1) = 0$
$\therefore x = 5$ বা, $x = 1$.
যেহেতু বাক্সের বাইরের উচ্চতা 4 সে. মি. সেহেতু ভিতরের উচ্চতা 5 সে. মি. হতে পারে না।
অতএব, বাক্সের পুরুত্ব = 1 সে. মি.।
উত্তর : 1 সে. মি.।

অনুশীলনী–১৩.৬

১। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর আয়তন 220 ঘন মিটার। এর কর্ণ 15 মিটার ও দৈর্ঘ্য 11 মিটার হলে, ঘনবস্তুর প্রস্থ ও উচ্চতা নির্ণয় কর।

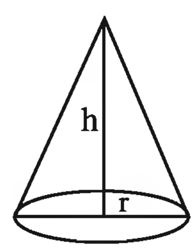
২। একটি আয়তাকার ঘনবস্তুর দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও উচ্চতার অনুপাত 21 ঃ 16 ঃ 12 এবং এর কর্ণ 87 সে. মি.। ঘনবস্তুটির তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৩। ঢাকনাসহ একটি বাক্সের বাইরের মাপ যথাক্রমে 10 সে.মি; 9 সে. মি. ও 7 সে. মি. এবং ভিতরের সমগ্র বাক্সটির পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 262 বর্গ সে. মি.। এর দেওয়ালের পুরুত্ব সমান হলে বাক্সের বেধ নির্ণয় কর।

৪। একটি ঘনকের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল 48 বর্গ মিটার। এর কর্ণের দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

(ছ) কোণক, বেলন ও গোলক

উদাহরণ ১। 4 সে. মি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ 3 সে. মি.। এর আয়তন ও হেলান তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।



সমাধান : আমরা জানি, কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ r একক, উচ্চতা h একক এবং তির্যক উন্নতি l একক হলে, কোণকের আয়তন $v = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ ঘন একক।
কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= \pi r l$ বর্গ একক

এখানে, $r = 3$ সে. মি., $h = 4$ সে. মি.

$\therefore l = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 16} = 5$

$\therefore l = 5$ সে. মি.

অতএব, কোণকের আয়তন $(v) = \frac{1}{3} \times 3{\cdot}1416 \times 3^2 \times 4$ ঘন সে. মি.

$= 3{\cdot}1416 \times 3 \times 4$ ঘন সে. মি.

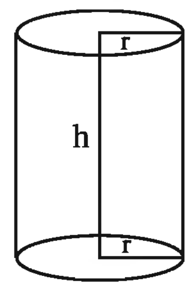
$= 37{\cdot}6992$ ঘন সে. মি.

এবং কোণকের বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 3{\cdot}1416 \times 3 \times 5$ বর্গ সে. মি.

$= 47{\cdot}124$ বর্গ সে. মি.

উত্তর : আয়তন $37{\cdot}6992$ ঘন সে. মি. এবং ক্ষেত্রফল $47{\cdot}124$ বর্গ সে. মি.।

উদাহরণ ২। 10 সে. মি. উচ্চতাবিশিষ্ট একটি বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ 4 সে. মি.। এর সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।



সমাধান : আমরা জানি, বেলনের ব্যাসার্ধ r একক এবং উচ্চতা h একক হলে,

বেলনের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2\pi r\,(h + r)$ বর্গ একক

এবং বেলনের আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন একক।

এখানে, $r = 4$ সে. মি. এবং $h = 10$ সে. মি.।

অতএব, বেলনের সম্পূর্ণ পৃষ্ঠের ক্ষেত্রফল $= 2 \times 3{\cdot}1416 \times 4(10 + 4)$ বর্গ সে. মি.

$= 2 \times 3{\cdot}1416 \times 56$ বর্গ সে. মি.

$= 351{\cdot}8592$ বর্গ সে. মি.

এবং বেলনের আয়তন $= 3{\cdot}1416 \times 4^2 \times 10$ ঘন সে. মি.

$= 502{\cdot}656$ ঘন সে. মি.।

উত্তর : ক্ষেত্রফল $351{\cdot}8592$ বর্গ সে. মি. ও আয়তন $502{\cdot}656$ ঘন সে. মি.।

উদাহরণ ৩। একটি বেলনের বক্রতলের ক্ষেত্রফল 100 বর্গ সে. মি. এবং এর আয়তন 150 ঘন সে. মি.। বেলনের উচ্চতা এবং ভূমির ব্যাসার্ধ নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ r সে. মি. এবং উচ্চতা h সে. মি.

তাহলে, বক্রতলের ক্ষেত্রফল $= 2\pi rh$ বর্গ সে. মি.

এবং বেলনের আয়তন $= \pi r^2 h$ ঘন সে. মি.

প্রশ্নানুসারে, $\pi r^2 h = 150$ -------------- (i)

এবং $2\pi rh = 100$ ------------ (ii)

(i) ÷ (ii) থেকে পাই,

$$\frac{\pi r^2 h}{2\pi rh} = \frac{150}{100}$$

বা, $r = 3$

$\therefore$ ভূমির ব্যাসার্ধ $= 3$ সে. মি.

সমীকরণ (ii) এ r এর মান বসিয়ে পাই,

$2 \times 3{\cdot}1416 \times 3 \times h = 100$

বা, $h = \dfrac{100}{2 \times 3{\cdot}1416 \times 3} = 5{\cdot}3052$

$\therefore$ বেলনের উচ্চতা $5{\cdot}3052$ সে. মি.।

উত্তর : উচ্চতা $5{\cdot}3052$ সে. মি. ও ব্যাসার্ধ 3 সে. মি.।

উদাহরণ ৪। 6 সে. মি., 8 সে. মি. ও 10 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট তিনটি ঘন গোলককে গলিয়ে একটি নতুন গোলক তৈরি করা হল। নতুন গোলকের ব্যাসার্ধ এবং পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

সমাধান : মনে করি, নতুন গোলকের ব্যাসার্ধ r সে. মি.

$\therefore$ নতুন গোলকের আয়তন $= \dfrac{4}{3}\pi r^3$ ঘন সে. মি.।

আবার, গোলকের ব্যসার্ধ a একক হলে,

গোলকের আয়তন $v = \dfrac{4}{3} . \pi a^3$ ঘন একক।

অতএব, ১ম গোলকের আয়তন $v_1 = \dfrac{4}{3} . \pi . 6^3$ ঘন সে. মি. $= \dfrac{4}{3} \times \pi \times 216$ ঘন সে. মি.

২য় গোলকের আয়তন $v_2 = \dfrac{4}{3} . \pi . 8^3$ ঘন সে. মি. $= \dfrac{4}{3} \times \pi \times 512$ ঘন সে. মি.

৩য় গোলকের আয়তন $v_3 = \dfrac{4}{3} . \pi . 10^3$ ঘন সে. মি. $= \dfrac{4}{3} \times \pi \times 1000$ ঘন সে. মি.

প্রশ্নানুসারে, $\dfrac{4}{3} . \pi r^3 = \dfrac{4}{3} \times \pi\,(216 + 512 + 1000)$

বা, $r^3 = 1728$

$\therefore r = 12$

$\therefore$ নতুন গোলকের ব্যাসার্ধ = 12 সে. মি.

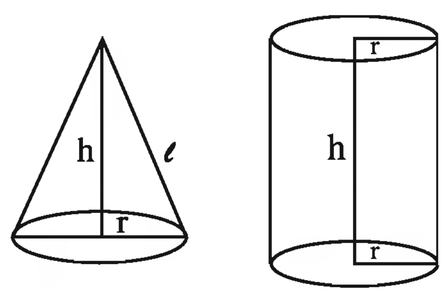
আবার, গোলকের পৃষ্ঠদেশের ক্ষেত্রফল $= 4\pi r^2$ বর্গ সে. মি.

$= 4 \times 3{\cdot}1416 \times 12^2$ বর্গ সে. মি.

$= 1809{\cdot}5616$ বর্গ সে. মি.

উত্তর : ব্যাসার্ধ 12 সে. মি. এবং ক্ষেত্রফল $1809{\cdot}5616$ বর্গ সে. মি.।

উদাহরণ ৫। একটি সমবৃত্তভূমিক কোণক এবং একটি বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ সমান। তাদের উচ্চতার অনুপাত 3 ঃ 2 হলে দেখাও যে, তাদের আয়তনের অনুপাত 1 ঃ 2 হবে।



সমাধান : মনে করি, কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ = r একক

$\therefore$ বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ = r একক

কোণকের উচ্চতা = 3h একক

বেলনের উচ্চতা = 2h একক

কোণকের আয়তন $= \dfrac{1}{3}\pi r^2 . 3h$ ঘন একক $= \pi r^2 h$ ঘন একক

বেলনের আয়তন $= \pi r^2 . 2h$ ঘন একক [যেহেতু, বেলনের ভূমির ব্যাসার্ধ = r]

$= 2\pi r^2 . h$ ঘন একক

অতএব, কোণকের আয়তন ঃ বেলনের আয়তন $= \pi r^2 h : 2\pi r^2 h$

$= 1 : 2$

অনুশীলনী–১৩.৭

[π এর মান $3 \cdot 1416$ ধরতে হবে এবং উত্তর আসন্ন তিন দশমিক স্থান পর্যন্ত উল্লেখ করতে হবে।]

১। একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের উচ্চতা 8 সে. মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 6 সে. মি.। এর সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল ও আয়তন নির্ণয় কর।

২। একটি সমবৃত্তভূমিক কোণকের ভূমির ব্যাসার্ধ 5 সে. মি. এবং হেলান উন্নতি 13 সে. মি. হলে, এর আয়তন এবং হেলান তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

৩। একটি পাইপের ভিতরের ও বাইরের ব্যাস 12 সে. মি. ও 14 সে. মি. এবং পাইপের উচ্চতা 5 মিটার। 1 ঘন সে. মি. লোহার ওজন $7 \cdot 2$ গ্রাম হলে, পাইপের লোহার ওজন কত?

৪। একটি কুয়ার গভীরতা 14 মিটার এবং ব্যাস 28 মিটার। প্রতি ঘন মিটার 5 টাকা হিসেবে ঐ কুয়ার মাটি খনন করতে কত টাকা লাগবে?

৫। একটি সমবৃত্তভূমিক বেলন এবং একটি সমবৃত্তভূমিক কোণক উভয়ের উচ্চতা h এবং একই ভূমির উপর অবস্থিত। তাদের বক্রতলের ক্ষেত্রফলের অনুপাত 4 ঃ 3 হলে দেখাও যে, ভূমির ব্যাসার্ধ $= \sqrt{\frac{5}{2}}h$ হবে।

৬। 6 সে. মি. ব্যাস বিশিষ্ট ধাতুর তৈরি একটি নিরেট গোলককে গলিয়ে 6 সে. মি. ব্যাসার্ধবিশিষ্ট বেলনের আকারে একটি নিরেট দণ্ডে পরিণত করা হল। দণ্ডটির দৈর্ঘ্য নির্ণয় কর।

পরিমিতি

বহুনির্বাচনী প্রশ্ন

১। একটি ট্রাপিজিয়াম আকৃতির লোহার পাতের সমান্তরাল বাহুদ্বয়ের দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে.মি. ও 1 সে.মি. এবং তাদের লম্ব দূরত্ব 2 সে.মি.। পাতের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি.?

ক. 1 খ. 2
গ. 3 ঘ. 4

২। একটি বাগানের দৈর্ঘ্য 50 মি. এবং প্রস্থ 40 মি.। বাগানের ভিতরে চারদিকে 5 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তা বাদে বাগানের দৈর্ঘ্য কত মিটার?

ক. 30 খ. 40
গ. 50 ঘ. 60

৩। একটি সামান্তরিকের দুইটি সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য যথাক্রমে 3 সে. মি. ও 5 সে. মি.। তার পরিসীমার অর্ধেক কত সে.মি. ?

ক. 4 খ. 8
গ. 15 ঘ. 16

৪। সমবাহু ত্রিভুজের পরিসীমা 6 সে. মি. হলে, তার ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে.মি. ?

ক. $9\sqrt{3}$ খ. $\frac{9\sqrt{3}}{4}$
গ. $\frac{3\sqrt{3}}{4}$ ঘ. $\frac{2}{\sqrt{3}}$

৫। একটি বৃত্তাকার মাঠের ব্যাস 26 মিটার। মাঠের বাইরে চারদিকে 2 মিটার চওড়া একটি রাস্তা আছে। রাস্তাসহ মাঠের ক্ষেত্রফল কত বর্গমিটার ?

ক. 225π খ. 169π
গ. 121π ঘ. 52π

৬। একটি কোণকের উচ্চতা 4 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 3 সে.মি. হলে, তার হেলানো উন্নতি কত সে.মি. ?

ক. 1 খ. 5
গ. 6 ঘ. 7

৭। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর :

i. 4 সে.মি. বর্গাকার পাথরের পরিসীমা 16 বর্গ সে.মি.
ii. 3 সে.মি. ব্যাসার্ধের বৃত্তাকার পাতের ক্ষেত্রফল হল 3π বর্গ সে.মি.
iii. 5 সে.মি. উচ্চতা এবং 2 সে.মি. ব্যাসার্ধের বেলন আকৃতির দন্ডের আয়তন 20π ঘন সে.মি.।

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i এবং ii খ. i এবং iii
গ. ii এবং iii ঘ. i, ii এবং iii

৮। নিচের তথ্যগুলো লক্ষ কর

i. একটি গোলকের ব্যাসার্ধ P সে.মি. হলে, তার পৃষ্ঠতলের ক্ষেত্রফল $4\pi P^2$ বর্গ সে.মি.

ii. একটি রম্বসের কর্ণদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ 90^0

iii. ত্রিভুজের ভূমি 6 সে.মি. ও উচ্চতা 5 সে.মি. হলে, ক্ষেত্রফল 30 বর্গ সে.মি.

ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে নিচের কোনটি সঠিক?

ক. i এবং iii খ. ii এবং iii

গ. i এবং ii ঘ. i, ii এবং iii

একটি সমকোণী ত্রিভুজ আকৃতির তামার পাতের উচ্চতা 4 সে.মি. এবং ভূমির ব্যাসার্ধ 3 সে.মি.।
ওপরের তথ্যের ভিত্তিতে (৯ - ১১) নং প্রশ্নের উত্তর দাও:

৯। পাতের পরিসীমা কত সে. মি. ?

ক. 5 খ. 6

গ. 7 ঘ. 12

১০। পাতের ক্ষেত্রফল কত বর্গ সে. মি.?

ক. 6 খ. 7

গ. 12 ঘ. 13

১১। পাতটি বৃহত্তম বাহুর চারদিকে ঘুরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার আয়তন কত ঘন সে. মি. ?

ক. 4π খ. 12π

গ. 24π ঘ. 36π

সৃজনশীল প্রশ্ন

১। একটি আয়তাকার জমির দৈর্ঘ্য প্রস্থের দেড়গুণ এবং ক্ষেত্রফল 2400 বর্গমিটার। (জমির প্রস্থ x মিটার)

ক. সংক্ষিপ্ত বিবরণীসহ জমির আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন কর।

খ. জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ. জমির ভিতরে সমান পাড়বিশিষ্ট একটি পুকুর আছে। পুকুরের ক্ষেত্রফল 800 বর্গমিটার হলে, পুকুর পাড়ের চওড়া নির্ণয় কর।

২। একটি আয়তাকার জমির ক্ষেত্রফল 1200 বর্গমিটার। দৈর্ঘ্য 10 মিটার কম হলে তা একটি বর্গক্ষেত্র হয়। (জমির দৈঘ্য x মিটার)

ক. ওপরের তথ্যের আনুপাতিক চিত্র অঙ্কন করে জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বীজগাণিতিক রাশির মাধ্যমে উপস্থাপন কর।

খ. জমির দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ নির্ণয় কর।

গ. জমির পরিসীমার সমান পরিসীমাবিশিষ্ট একটি বর্গাকার ঈদগাহ মাঠ, 50 সে.মি. বর্গাকার পাথর দ্বারা বাঁধাই করতে কয়টি পাথর লাগবে ?

৩। একটি আয়তাকার লোহার পাতের ক্ষেত্রফল 0.125 বর্গমিটার এবং দৈর্ঘ্য, প্রস্থের দ্বিগুণ।

ক. পাতের প্রস্থ x মিটার হলে, আনুপাতিক চিত্র অংকন করে পাতের দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বীজগাণিতিক রাশির মাধ্যমে প্রকাশ কর।

খ. পাতের পরিসীমা নির্ণয় কর।

গ. পাতটি বৃহত্তম বাহুর চারদিকে ঘুরালে যে ঘনবস্তু উৎপন্ন হয় তার সম্পূর্ণ তলের ক্ষেত্রফল নির্ণয় কর।

উত্তরমালা

অনুশীলনী–৫

১। 17 মি. ২। 25·06 মি. (প্রায়) ৩। 25 কি. মি. ৪। 7·2 সে. মি.; 15·12 বর্গ সে. মি. ৫। $\sqrt{\frac{3}{4}}a^2$ বর্গ সে. মি.।

অনুশীলনী–৭

১। (i) 1·4 সে. মি. (ii) 2·4 সে. মি. ২। 5·6 সে. মি.

অনুশীলনী–১২.১

17. $\frac{1}{2}$ 18. $\frac{2}{5}$ 19. $\frac{4}{3}$ 20. $\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$

অনুশীলনী–১২.২

9. $A = 52\frac{1}{2}^\circ, B = 7\frac{1}{2}^\circ$ 10. $A = 37\frac{1}{2}^\circ, B = 7\frac{1}{2}^\circ$

11. $\theta = 0^\circ, \theta = 90^\circ$ 12. $\theta = 60^\circ$ 13. $\theta = 30^\circ$ 15. 3

অনুশীলনী–১২.৩

১। 34·641 মিটার ২। 51·962 মিটার ৩। 86·603 মিটার। ৪। 415·692 মিটার ৫। 10·607 মিটার
৬। 81·962 মিটার ৭। 56·785 মিটার ৮। 16 মিটার ৯। 37·321 মিটার ১০। 141·962 মিটার।

অনুশীলনী–১৩.১

১। 1056 বর্গ মি. ২। 8 মি. ৩। 30 মি. 20 মি. ৪। 38·56 হেক্টর (প্রায়) ৫। 50 মি., 40 মি.।

অনুশীলনী–১৩.২

১। 72 সে. মি., 1944 বর্গ সে. মি. ২। 5 সে. মি. ৩। 852 বর্গ সে. মি. ৪। 35·35 মি. (প্রায়) ৫। 16 মি., 12 মি.,
৬। 48·66 সে. মি. (প্রায়)।

অনুশীলনী–১৩.৩

১। 20 মি., 15 মি. ২। 50 সে. মি. ৩। 24·249 সে. মি. (প্রায়), 254·611 বর্গ সে. মি. (প্রায়)
৪। 54 বর্গ একক, 96 বর্গ একক ৫। 44·44 কি. মি. (প্রায়) ৬। 36 বা 12 সে. মি. ৭। 1·5 মি., 0·974 বর্গ মি.
৮। 17·26 সে. মি. (প্রায়)

অনুশীলনী–১৩.৪

১। 14·008 সে. মি. ২। 32·987 সে. মি. ৩। 25 বার। ৪। 31·513 মি. ৫। 0·35 মি.

অনুশীলনী–১৩.৫

১। 128·282 বর্গ সে. মি. (প্রায়) ২। 24·814 সে. মি. (প্রায়) ৩। 7·003 মি. ৪। 175·93 বর্গ মি.
৫। 35·007 মি.

অনুশীলনী–১৩.৬

১। 10 মি. ও 2 মি. এবং 2 মি. ও 10 মি. ২। 14040 বর্গ সে. মি. ৩। 1 সে. মি. ৪। 4·899 মি.

অনুশীলনী–১৩.৭

১। 301·594 বর্গ সে. মি., 301·594 ঘন সে. মি. ২। 314·16 ঘন সে. মি., 204·204 বর্গ সে. মি.
৩। 147·027 কিলোগ্রাম। ৪। 43102·75 টাকা ৫। 1 সে. মি.।

২০১০
শিক্ষাবর্ষ

সমৃদ্ধ বাংলাদেশ গড়ে তোলার জন্য যোগ্যতা অর্জন কর

– মাননীয় প্রধানমন্ত্রী শেখ হাসিনা

শুনহে মানুষ ভাই
সবার উপরে মানুষ সত্য তাহার উপরে নাই

২০১০ শিক্ষাবর্ষ থেকে সরকার কর্তৃক বিনামূল্যে বিতরণের জন্য